

普通高等教育大学物理规划教材

大学基础物理学（下）

郑勇林 卢孟春 朱晓玲 刘 鸿 戴松晖 编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书依据教育部非物理类专业物理基础课程教学指导分委员会制定的《理工科非物理类专业大学物理课程教学基本要求》的框架编写而成, 全书涵盖了基本要求的核心内容, 并增加了部分拓展内容。全书分为上、下两册共 14 章, 包含力学、热学、电磁学、振动和波、波动光学、狭义相对论和量子力学基础、分子与固体等内容。每章都包含基本内容、本章提要、阅读材料、习题, 全书最后附有习题答案。此外, 为了拓展读者的知识面, 本书还增加了部分选学内容, 这部分内容均标以“*”号。阅读材料也可作为扩展内容, 介绍了物理学在前沿科学和技术中的应用及前沿科学理论, 选学内容和阅读材料都自成体系, 可选讲或指导学生阅读。

本书可作为高等学校理工科非物理类专业的大学物理教材, 也可作为高等职业院校相关专业课程教材和教学参考书。

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有, 侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

大学基础物理学. 下 / 郑勇林等编著. —北京: 电子工业出版社, 2014.8

普通高等教育大学物理规划教材

ISBN 978-7-121-23238-1

I. ①大… II. ①郑… III. ①物理学—高等学校—教材 IV. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 100886 号

策划编辑: 张小乐

责任编辑: 张小乐

印 刷:

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×980 1/16 印张: 16.25 字数: 370 千字

版 次: 2014 年 8 月第 1 版

印 次: 2014 年 8 月第 1 次印刷

定 价: 35.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010) 88258888。

前 言

为了更好地适应我国高等教育发展,满足目前社会对一般高等学校大众化教育背景下人才培养的各项要求,进一步探索和完善我国高等学校应用型人才培养体系,积极探索适应 21 世纪人才培养的教学模式,我们根据教育部非物理类专业物理基础课程教学指导分委员会制定的《理工科非物理类专业大学物理课程教学基本要求》(后简称“纲要”)的思想和精神,编写了《大学基础物理学》(上、下)教材及《大学基础物理学习指导》辅导教材。

物理学是自然科学的基础,在人类认识自然世界的进程中一直发挥着重要的作用。尽管本书所涉及的大多数知识是前几个世纪确立的理论,但对于今天乃至未来的人类生活和科技发展都有着重要的影响。对于大学本、专科学生来说,大学物理是学习其他后续课程的基础课,是一门全面地、系统地培养学生综合素质的课程。通过对大学基础物理学课程的学习,可以培养学生科学的思维方式和研究问题的方法,能够开阔思路,激发探索和创新精神,提高科学素养、增强社会适应能力。

本书分为上、下两册共 14 章,包括力学、热学、电磁学、振动和波、波动光学、狭义相对论和量子力学基础、分子与固体等内容。每章都包含基本内容、本章提要、阅读材料、习题,全书最后附有习题答案。此外,为了拓展读者的知识面,本书还增加了部分选学内容,这部分内容均标以“*”号。阅读材料也可作为扩展内容,介绍了物理学在前沿科学和技术中的应用及前沿科学理论,选学内容和阅读材料都自成体系,可选讲或指导学生阅读。

本书依据“纲要”基本要求而编写,旨在帮助读者掌握物理学的基本概念和规律,建立较完整的物理思想。让读者能学以致用,实现知识能力与素质协调发展。本书在编写上力求内容简练,概念清晰,突出重点,可供高等学校非物理类专业本、专科及成人高等院校的学生学习参考。

本书第 1、2 章由赵茂娟、杨敏编写,郑勇林、杨维审阅;第 3、10、12 章由朱晓玲、王晓茜编写,郑勇林、杨维审阅;第 4 章由郑勇林、高志华编写,杨维审阅;第 5、8 章由杨维编写,郑勇林审阅;第 6 章由刘鸿编写,郑勇林、杨维审阅;第 7、9 章由戴松晖、陆智编写,郑勇林、卢孟春审阅;第 11、13、14 由郑勇林、卢孟春编写,孙婷雅、杨维、杨敏审阅。李伯恒、孙婷雅、郑勇林、杨维、陆智审阅了全书习题。全书由郑勇林统稿。

本书在编写过程中得到了成都大学、长江师范学院、四川农业大学理学院、重庆工业

职业技术学院物理教研室等单位的大力支持，编者在此致以衷心的感谢。特别感谢电子工业出版社给予的大力支持和帮助。

西南大学郑瑞伦教授细致地审阅了书稿，提出许多中肯的修改意见和建议。成都大学汪令江教授，长江师范学院周晏副教授为本书编写做了大量工作，在此表示感谢。

本书编写过程中参考了其他同类教材，在此一并致谢。

由于编者水平有限，书中可能存在不妥甚至错误之处，敬请批评指正。

编著者

2014年8月于成都

目 录

第 9 章 振动	1
9.1 简谐振动的模型	1
9.1.1 简谐振动特征与简谐振动方程	1
9.1.2 描述简谐振动的特征量	4
9.1.3 简谐振动的旋转矢量表示法	6
9.2 单摆、复摆	8
9.2.1 单摆	8
9.2.2 复摆	8
9.3 简谐振动的能量	10
9.4 简谐振动的合成与分解	12
9.4.1 两个同方向同频率简谐振动的合成	12
9.4.2 两个相互垂直、同频率的简谐振动的合成	15
9.4.3 两个同方向不同频率简谐振动的合成	17
9.5 阻尼振动 受迫振动 共振	18
9.5.1 阻尼振动	18
9.5.2 受迫振动	20
9.5.3 共振	21
9.6 电磁振荡	22
9.6.1 LC 振荡器	22
9.6.2 无阻尼电磁振荡及振荡方程	23
*9.7 非线性振动	24
9.7.1 非线性振动简介	24
9.7.2 非线性特征	25
本章提要	27
阅读材料	29
习题	31
第 10 章 波动	37
10.1 机械波的概念	37
10.1.1 机械波的产生	37

10.1.2	横波和纵波	38
10.1.3	机械波的描述	38
10.1.4	波长、波的周期、频率和波速的关系	39
10.2	平面简谐波	40
10.2.1	平面简谐波及波函数	40
10.2.2	波函数的意义	42
10.3	波的能量 波的强度	45
10.3.1	波的能量和能流密度	45
10.3.2	波的强度	48
10.3.3	波的吸收	50
10.3.4	声波	50
10.4	波的干涉	53
10.4.1	波的叠加原理	53
10.4.2	波的干涉	53
10.4.3	驻波	56
10.5	惠更斯原理和波的衍射	64
10.5.1	惠更斯原理	64
10.5.2	波的衍射	65
10.6	平面电磁波	66
10.6.1	电磁波的产生与传播	66
10.6.2	平面电磁波的性质	68
10.7	多普勒效应	69
10.7.1	声波的多普勒效应	69
10.7.2	电磁波的多普勒效应与红移现象	72
	本章提要	72
	阅读材料	75
	习题	77
第 11 章	光的干涉和衍射	82
11.1	光源和光的相干性	82
11.1.1	光源、单色光、相干光	82
11.1.2	光的相干性、相干光的获得	84
11.1.3	光程与光程差	85
11.2	杨氏双缝干涉 劳埃德镜实验	86

11.2.1	杨氏双缝实验	86
11.2.2	劳埃德镜实验	88
11.2.3	反射光的相位突变和附加光程差	89
11.3.4	透镜不引起附加光程差	89
11.3	薄膜干涉 光学干涉测薄膜厚度	90
11.3.1	薄膜干涉	90
11.3.2	增透膜与高反射膜	91
11.3.3	劈尖干涉 牛顿环	93
*11.3.4	光学干涉测薄膜厚度	96
11.4	光的衍射现象和惠更斯-菲涅耳原理	98
11.4.1	光的衍射现象	98
11.4.2	惠更斯-菲涅耳原理	98
11.5	夫琅禾费衍射	99
11.5.1	单缝夫琅禾费衍射	99
11.5.2	圆孔夫琅禾费衍射 光学仪器的分辨率	102
11.6	光栅衍射	104
11.6.1	光栅衍射 光栅方程	104
11.6.2	光栅光谱 缺级现象	106
11.6.3	光的干涉与衍射	107
11.7	X射线的衍射	107
11.7.1	电磁波谱	107
11.7.2	X射线的产生	108
11.7.3	X射线的衍射	110
11.8	光的偏振	112
11.8.1	光的横波性与偏振态	112
11.8.2	自然光 偏振光	113
11.8.3	圆偏振光和椭圆偏振光	113
11.9	起偏和检偏 马吕斯定律	114
11.9.1	起偏和检偏	114
11.9.2	马吕斯定律	114
11.10	反射和折射时光的偏振 布儒斯特定律	115
11.11	双折射	117
11.11.1	寻常光和非常光	117
11.11.2	光轴、单轴晶体、双轴晶体、主平面	118

11.11.3 惠更斯原理解释晶体的双折射	118
*11.12 几何光学	120
11.12.1 几何光学基本定律	120
11.12.2 光在平面上的反射和折射成像	122
11.12.3 光在球面上的反射和折射成像	123
11.12.4 薄透镜	126
本章提要	128
阅读材料	131
习题	135
第 12 章 相对论基础	140
12.1 力学相对性原理 伽利略变换	140
12.1.1 经典力学的相对性原理	140
12.1.2 经典力学的绝对时空观	141
12.1.3 伽利略变换	141
12.2 狭义相对论基本原理 洛伦兹变换	142
12.2.1 狭义相对论基本原理	142
12.2.2 洛伦兹变换	143
12.2.3 洛伦兹速度变换式	143
12.3 狭义相对论的时空观	145
12.3.1 同时性的相对性	145
12.3.2 时间膨胀	145
12.3.3 长度收缩	146
12.3.4 经典时空观与相对论时空观的比较	147
*12.3.5 狭义相对论的相关实验	148
12.4 狭义相对论动力学基础	149
12.4.1 动量与速度的关系	149
12.4.2 质量与能量的关系	150
12.4.3 能量与动量的关系	151
*12.5 广义相对论简介	153
12.5.1 光线在引力场中的弯曲	154
12.5.2 水星轨道近日点的进动	154
12.5.3 光谱线的引力红移	154
本章提要	155

阅读材料	156
习题	157
第 13 章 量子力学基础	160
13.1 黑体辐射 普朗克能量量子假说	161
13.1.1 黑体辐射 斯特藩-玻耳兹曼定律	161
13.1.2 维恩位移定律	162
13.1.3 黑体辐射的瑞利-金斯公式	163
13.1.4 经典物理的困惑	164
13.1.5 普朗克能量量子假说 普朗克公式	164
13.2 光电效应 爱因斯坦的光子理论	167
13.2.1 光电效应	167
13.2.2 爱因斯坦的光子理论 光的波粒二象性	168
13.2.3 康普顿效应	170
13.3 实物粒子的波粒二象性 不确定关系	171
13.3.1 德布罗意假设及实验证明	171
13.3.2 德布罗意波的统计解释	174
13.3.3 不确定关系	174
13.4 波函数薛定谔方程	176
13.4.1 波函数	176
13.4.2 薛定谔方程	178
13.4.3 一维无限深势阱	181
13.4.4 势垒贯穿	185
13.5 量子力学的基本原理	187
13.5.1 状态和波函数	187
13.5.2 量子力学的运动状态满足薛定谔方程	188
13.5.3 定态薛定谔方程	188
13.5.4 算符、力学量的平均值	189
13.6 氢原子的量子力学处理方法	191
13.6.1 氢原子光谱的规律性	191
13.6.2 玻尔的氢原子理论	192
13.6.3 玻尔理论的缺陷	195
13.6.4 氢原子的量子力学理论	196
13.6.5 量子条件和量子数	197

13.6.6 氢原子核外电子定态波函数	198
13.6.7 电子自旋	200
*13.7 夫兰克-赫兹实验	201
本章提要	204
阅读材料	207
习题	208
第 14 章 分子与固体	211
14.1 晶体结构	211
14.1.1 晶体的描述	211
14.1.2 典型的晶体结构	213
14.1.3 非晶体和准晶体	214
14.2 离子结合与离子晶体	216
14.2.1 原子的电离能、亲和能及电负性	216
14.2.2 离子的形成与结合	217
14.2.3 离子晶体的内聚能	218
14.3 共价结合与共价晶体	220
14.3.1 氢分子中的共价键	220
14.3.2 共价结合的饱和性和方向性	221
14.3.3 共价晶体的结构	223
14.3.4 共价晶体的内聚能	223
14.4 金属结合与金属晶体	224
14.5 能带、导体和绝缘体	225
14.5.1 固体的能带结构	225
14.5.2 导体、半导体和绝缘体	227
14.5.3 PN 结、半导体器件	229
14.5.4 纳米材料	230
本章提要	232
阅读材料	233
习题	238
习题参考答案	239
参考文献	247

第9章 振 动

自然界中广泛存在着一种往复的运动形式，从空间上说，物体在某一平衡位置附近往复运动；从时间上说，运动呈现一定的周期性，把这种运动称为振动。虽然振动有各种形式，本质上它们有各自的特点，但在很多方面是有共性的。例如，行星的运动，机械中活塞的往复运动，高楼大厦的微小振动，固体中原子的振动等；在生态方面，心脏的跳动，血液循环，生态循环等；在电路中，电流、电压、电荷量、电场强度、磁场强度等在某一值附近随时间做周期性的变化。这些振动虽然在本质上各有自己的特点，但它们都具有一定周期性的共同性，这正反映了自然界的统一性及它们的内在联系。因此，广义地说，任何一个物理量在某个定值附近反复变化都可以称为振动。

如果物体的周期性运动只限于在空间某一位置附近的一再往复出现，这种运动称为机械振动，上面所列举的行星的运动、机械中活塞的往复运动、高楼大厦的微小振动、固体中原子的振动等都是机械振动。机械振动与电磁振动在本质上是不同的，但在运动形式上都具有振动的共性，它们遵从的规律也可以用统一的数学形式来描述。所以，机械振动的基本规律也是研究其他振动，波动、波动光学、无线电技术及现代物理的基础。

本章主要讨论简谐振动及简谐振动的描述，并简要介绍阻尼振动、受迫振动和共振现象。在各种振动现象中，简谐振动是最简单、最基本的振动，任何复杂的振动形式都可以看作若干简谐振动的合成。因此，研究简谐振动是研究各种复杂振动的基础。

9.1 简谐振动的模型

振动的形式是多种多样的，情况大都较为复杂。物体运动时，如果离开平衡位置的位移（或角位移）按余弦规律随时间变化，这种运动称为**简谐运动**（或称**简谐振动**）。

最常见的简谐振动模型有弹簧振子、单摆、复摆等。学习简谐振动首先将从弹簧振子的振动特征分析出发，研究简谐振动的受力特征；再结合动力学原理（牛顿第二定律），得出谐振动的动力学特征方程（位移与时间的微分方程）；最后求解微分方程得出谐振动的运动学方程，即位移与时间、速度与时间、加速度与时间的关系方程。

9.1.1 简谐振动特征与简谐振动方程

如图 9.1 所示，质量为 m 的物体系于一端固定的轻质弹簧的自由端，形成一个弹簧振子系统。若将该系统放置在光滑的水平面上，物体所受的阻力略去不计。当弹簧处于自由

状态时,物体在水平方向所受合外力为零,此时物体所在位置为系统的平衡位置,取平衡位置 O 为坐标原点,水平向右为 Ox 轴的正方向。

若将弹簧压缩或拉伸,弹簧将因其内部产生的且始终指向平衡位置的弹力作用,而在平衡位置附近做往复运动。

现将弹簧拉伸或压缩至 P 或 P' ,这时由于弹簧被拉伸或被压缩,使指向平衡位置的弹性力作用在物体上。撤去外力后,物体将会在弹性力的作用下向左(或向右)运动。当物体回到平衡位置时,物体所受到的弹性力减小到零,但物体的惯性使它继续向左(或向右)运动,致使弹簧被压缩(或拉伸),这时物体受到的弹性力又开始增加,当物体到达最大位置

(P' 或 P)后受到最大作用力。在整个过程中,由于弹簧被拉伸(或被压缩)而产生指向平衡位置的弹性力作用在物体上,迫使物体返回到平衡位置,这样在弹性力的作用下,物体就在平衡位置附近往复运动,如图9.1所示。

由胡克定律可知,物体所受弹簧的回复力为

$$F = -kx$$

式中, k 为弹簧的劲度系数,负号表示力与位移的方向相反。

在回复力作用下,振动物体的加速度为

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x \quad (9-1)$$

令 $\omega^2 = \frac{k}{m}$,则式(9-1)改写为

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x$$

或记作微分表达式为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \quad (9-2)$$

式(9-2)为简谐运动的运动微分方程。这是一个二阶常系数线性齐次常微分方程。可用分离变量法求解。

做变量代换 $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$,则式(9-2)变为

$$v \frac{dv}{dx} = -\omega^2x$$

分离变量可得

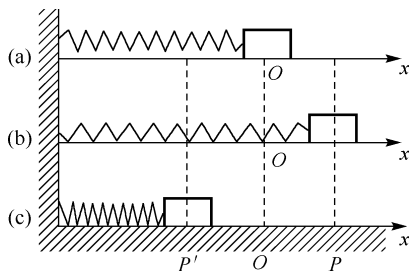


图9.1 弹簧振子的振动

$$v dv = -\omega^2 x dx$$

等式两边积分, 得 $v^2 = -\omega^2 x^2 + \omega^2 A^2$, 其中 A 是振动物体偏离平衡位置的最大位移。再将 v^2 用 $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ 表示, 再一次分离变量, 可得

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega dt$$

积分后得

$$x = A \sin(\omega t + \varphi') \quad (9-3a)$$

其中 φ' 是一积分常量, 若令 $\varphi_0 = \varphi' + \pi/2$, 则式 (9-3a) 可写为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (9-3b)$$

所以, 物体做简谐运动时, 位移是时间的余弦函数。当然也可以说位移是时间的正弦函数, 为了统一, 采用余弦函数^①。所以式 (9-3a)、式 (9-3b) 称为简谐运动方程, 式中, A 、 φ_0 为积分常量, 其物理意义将在下文讨论。

将式 (9-3b) 对时间求一阶、二阶导数, 可分别得到简谐运动物体的速度 v 和加速度 a 分别为

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = v_m \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (9-4)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x \quad (9-5)$$

式 (9-4) 中, $v_m = \omega A$ 称为速度的幅值。式 (9-5) 中, 可令 $a_m = \omega^2 A$, a_m 称为加速度幅值。由此可见, 物体做简谐运动时, 其速度、加速度也随时间周期性地变化, 如图 9.2 所示。

对于两个积分常量 A 、 φ_0 是这样确定的, 设 $t=0$ 时, 物体偏离平衡位置的位移和速度分别为 x_0 、 v_0 , 于是由式 (9-3b) 和式 (9-4) 有

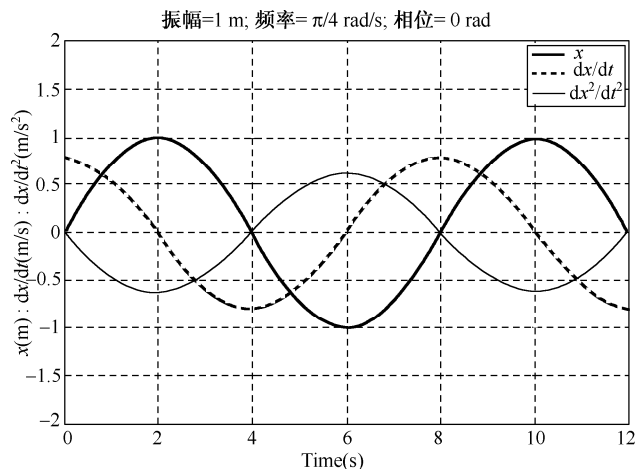
$$x_0 = A \cos \varphi_0, \quad v_0 = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \varphi_0$$

求解得到

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \varphi_0 = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \quad (9-6)$$

式 (9-6) 中的 A 代表简谐振动的振幅, φ_0 代表简谐振动的初相。

^① 简谐运动的表达式也可用复指数形式表示为 $x = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)}$ 。式 (9-3a) 及式 (9-3b) 就是指指数形式的虚数部分和实数部分。用复指数形式表示振动, 在今后的研究中将显示出运算的方便。

图 9.2 简谐运动的 x 、 v 、 a 随时间的变化

9.1.2 描述简谐振动的特征量

下面讨论描述简谐运动的三个特征量 A 、 φ_0 及 ω 的物理意义。这三个量分别称为简谐运动的振幅、初相位、圆（角）频率。

1. 振幅

因为在简谐运动的表达式中，余弦或正弦函数的值在 $+1$ 和 -1 之间，所以物体的振动范围在 $+A$ 和 $-A$ 之间，把谐振动物体偏离平衡位置的最大位移的绝对值 A 称为**振幅**。

2. 周期和频率

振动的特征之一是运动具有周期性，把物体做一次完全振动所经历的时间称为振动的**周期**，用 T 表示。周期的单位为秒（s）。因此，每隔一个周期，振动的状态就完全重复一次，其数学表示为

$$x = A \cos[\omega(t + T) + \varphi_0]$$

由于余弦函数的周期性，物体做一次完全振动后应有 $\omega T = 2\pi$ 。于是有

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (9-7)$$

频率，即表示单位时间内完成简谐振动的次数，用 ν 或 f 表示，单位为赫兹（Hz）。显然，频率与周期的关系为

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (9-8)$$

由此可知

$$\omega = 2\pi\nu \quad (9-9)$$

即 ω 等于物体在单位时间内所做的完全振动次数的 2π 倍, ω 称为**角频率** (或**圆频率**), 单位是弧度每秒 ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$)。

3. 相位

由简谐运动方程 (9-3b) 可知, 要确定振动物体在任意时刻的运动状态, 除了给定振幅和圆频率外, 振动物体的运动状态还要由 $(\omega t + \varphi_0)$ 决定, 也就是说, $(\omega t + \varphi_0)$ 既决定了振动物体在任意时刻相对平衡位置的位移, 也决定了物体在该时刻的速度。所以定义 $(\omega t + \varphi_0)$ 为简谐运动在 t 时刻的**相位** (或**位相**、**周相**), 它是决定简谐运动的物理量。

对于一个振幅、圆频率都确定的振动物体, 在一个周期内振动物体在各时刻的运动状态完全由振动的相位确定。振动过程中, 凡是位移、速度、加速度都相同的状态, 它们对应的相位必然相差 2π 或 2π 的整数倍。因此, 相位能充分地反映物体振动状态的周期性特征。

当 $t=0$ 时, 相位 $\omega t + \varphi_0 = \varphi_0$, 故 φ_0 称为**初相位** (简称**初相**), 它是决定初始时刻 (开始计时的起点) 振动物体运动状态的物理量。式 (9-6) 就是振动物体在 $t=0$ 时, 振幅和初相的解析式。

用相位来描述物体的振动状态, 还可比较两个同频率的简谐运动的步调。设有两个同频率的谐振动

$$\begin{aligned} x_1 &= A\cos(\omega t + \varphi_{10}) \\ x_2 &= A\cos(\omega t + \varphi_{20}) \end{aligned}$$

它们的相位差为

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{20}) - (\omega t + \varphi_{10}) = \varphi_{20} - \varphi_{10} \quad (9-10)$$

式 (9-10) 表明: 当 $\Delta\varphi = 0$ 或 2π 时, 两个简谐运动同时达到各自同方向的位移、速度、加速度的最大值和最小值; 同时通过平衡位置而且振动方向相同, 它们的振动步调完全一致, 称其为**同相**。

当 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$ ($k=0,1,2,\dots$) 时两个简谐运动将分别到达 x 轴正、负两个方向的最大位移处, 同时通过平衡位置, 但运动方向相反, 称其为**反相**。

当 $\Delta\varphi$ 为其他值时, 若 $\Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10} > 0$, 称第二个谐振动超前第一个振动 $\Delta\varphi$, 反之则称第二个谐振动落后第一个振动 $-\Delta\varphi$ 。

上述讨论的三个特征量振幅 A 、圆频率 ω 和初相 φ_0 称为**简谐运动的三要素**, 对于一个简谐运动只要确定了该三要素, 简谐运动的规律就完全确定了。

例 9-1 如图 9.1 所示, 一轻弹簧的劲度系数 $k = 50 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, 将质量为 2 kg 的物体从平衡位置向右拉长到 $x_0 = 0.02 \text{ m}$ 处, 并以 $v_0 = -\frac{\sqrt{3}}{10} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度开始运动, 试求: ① 谐振

动方程; ② 物体从初位置运动到第一次经过 $-\frac{A}{2}$ 处时的速度。

解 ① 要确定物体的谐振动方程, 须确定角频率 ω 、振幅 A 和初相 φ_0 三个物理量。由该振动的力学参量, 可求得角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = 5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

振幅和初相由初始条件 x_0 及 v_0 决定, 已知 $x_0 = 0.02 \text{ m}$, $v_0 = -\frac{\sqrt{3}}{10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 由式 (9-6) 得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{0.02^2 + \frac{(-\sqrt{3}/10)^2}{5^2}} = 0.04 \text{ m}$$

$$\varphi_0 = \arctan \frac{-v_0}{\omega x_0} = \arctan \frac{\sqrt{3}/10}{5 \times 0.02} = \arctan \sqrt{3}$$

由题意知 x_0 为正, v_0 为负, 故 $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ 。

将振幅 A 、圆频率 ω 及初相 φ_0 代入简谐振动方程 $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ 中, 可得

$$x = 0.04 \cos\left(5t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ m}$$

② 欲求 $x = -\frac{A}{2}$ 处的速度, 须先求出物体从初位置运动到第一次抵达 $-\frac{A}{2}$ 处的相位。

由 $x = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ 得

$$\omega t + \frac{\pi}{3} = \arccos \frac{x}{A} = \arccos \frac{-A/2}{A} = \frac{2\pi}{3} \left(\text{或} \frac{4\pi}{3} \right)$$

由题意可知, 物体由初位置 $x_0 = 0.02 \text{ m}$ 第一次运动到 $x = -\frac{A}{2}$ 处的相位为 $\omega t = \frac{\pi}{3}$, 将 A , ω 和 ωt 的值代入速度公式, 可得

$$v = -A\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = -0.04 \times 5 \times \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{10} = -0.173 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

负号表示速度的方向沿 x 轴负方向。

9.1.3 简谐振动的旋转矢量表示法

简谐运动的三个特征量 (A 、 ω 、 φ) 可用旋转矢量法表示。如图 9.3 所示, 设有一长度为 A 的矢量 \overline{OM} 在平面内绕 O 点以匀角速率 ω 逆时针旋转, 其转动的角速度 ω 与振动物体的角频率相等, 矢量 A 的模 $|A|$ 等于振动物体的振幅 A , 那么这个矢量就是**旋转矢量** (也称为**振幅矢量**)。并设初始时刻 ($t=0$) 该矢量的位置与 Ox 轴之间的夹角为 φ_0 , 则任

意时刻 t , 矢量 \overline{OM} 的端点 M 在 Ox 轴上的投影点 P 的运动规律满足方程

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

其中, A 为圆周的半径, ωt 是经过 t 时间后矢量 A 沿逆时针方向转过的角度, 矢量 \overline{OM} 与 Ox 之间的夹角为 $(\omega t + \varphi_0)$, 与做简谐运动的物体在该时刻的相位相同, 此时矢量 A 与 Ox 轴的夹角就为 $(\omega t + \varphi_0)$ 。不难看出, 上述投影点 P 的运动恰是做简谐运动的物体在 t 时刻相对于原点的位移。所以, 一个简谐运动可以用一个旋转矢量来表示, 矢量旋转一周的时间为 $T = 2\pi/\omega$, 这就相当于物体在 x 轴做一次完全谐振动。

由此可见, 利用旋转矢量图, 可以很直观地把谐振动的三个特征物理量表示出来。矢量的长度即为振幅 $|A|$, 矢量旋转的角速度即为振动的角频率 ω , 矢量在初始时刻和任意时刻与 Ox 轴的夹角的是振动的初相 φ_0 与相位 $(\omega t + \varphi_0)$ 。

例 9-2 用旋转矢量法求解例 9-1 中的初相 φ_0 及物体从初位置运动到第一次经过 $-\frac{A}{2}$ 处时的时间。

解 ① 根据初始条件画出振幅矢量的初始位置, 如图 9.4 所示。由图可得

$$\varphi_0 = \arccos \frac{x_0}{A} = \arccos \frac{0.02}{0.04} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

② 从振幅矢量图 9.4(b)可知, 从初位置 x_0 运动到第一次经过 $x = -\frac{A}{2}$ 处时, 旋转矢量转过的角度是 $\pi - 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$, 这就是两者的相位差, 由于振幅矢量的角速度为 ω , 所以得到所需的时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta \varphi}{\omega} = \frac{\pi/3}{5} = \frac{\pi}{15} = 0.209 \text{ s}$$

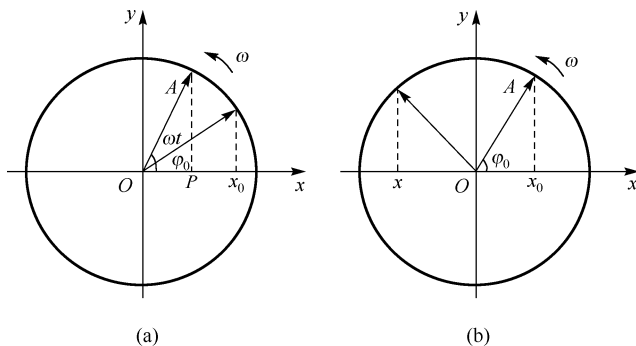


图 9.4 例 9-2 图

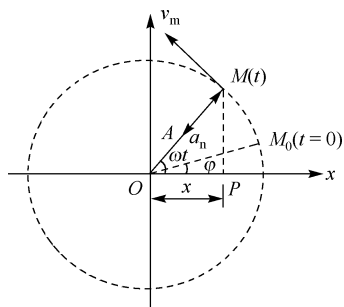


图 9.3 简谐运动的旋转矢量

9.2 单摆、复摆

9.2.1 单摆

一根长为 l 的轻质无弹性细绳上端固定，下端连接一个质量为 m 的小球，细绳静止于铅直位置时，小球在位置 O 处。此时作用在小球上的合外力为零，位置 O 为平衡位置。将小球轻轻地拉离平衡位置，使摆线与竖直方向的夹角为 θ ($< 5^\circ$)，松手后小球将在 O 点附近做往复运动，这一振动系统称为单摆，如图 9.5 所示。

设 t 时刻小球偏离铅垂位置时角位移为 θ ，并规定小球在平衡位置右侧时， θ 为正。因小球所受的外力有竖直向下的重力 $G = mg$ 与沿拉线向上的拉力 T ，二力的合力为 $mg \sin \theta$ ，方向沿小球在该点处运动轨迹的切向方向，并指向平衡位置。由牛顿第二定律有

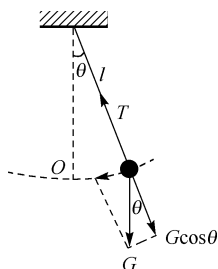


图 9.5 单摆

$$mg \sin \theta = -ml \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

该关系式中因为 θ 很小 ($< 5^\circ$)，故有 $\sin \theta \approx \theta$ ，于是上式可写为

$$mg \theta = -ml \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta \quad (9-11)$$

式 (9-11) 表明：当 θ 很小时，单摆的角加速度与角位移成正比，这与式 (9-2) 的形式完全一样，可见，单摆的运动具有简谐运动的特征，因而也是简谐运动。

对于式 (9-11)，若令 $\omega^2 = \frac{g}{l}$ ，则解微分方程，可得

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (9-12)$$

式中， θ_m 为角振幅， φ_0 为初相位，二者由初始条件决定。将式 (9-11) 与式 (9-2) 相比较，或将式 (9-12) 与式 (9-3b) 相比较，可得单摆的角频率和周期分别为

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (9-13)$$

可见，单摆的周期取决于摆长和该处的重力加速度，而与摆球的质量无关。在工程技术应用中，利用式 (9-13) 测量单摆的周期可以确定该地点的重力加速度。

9.2.2 复摆

一个可绕固定无摩擦的水平轴 O 转动的刚体称为复摆。如图 9.6 所示，平衡时，摆的

质心 C 在轴的正下方。当刚体摆动到任意位置时, 质心与轴的连线 OC 偏离竖直位置一个微小角度 θ 。规定刚体质心偏离平衡位置沿逆时针方向转过的角位移为正。

对于刚体的定轴转动, 刚体受到一对给定定轴的力矩作用时, 刚体运动状态发生变化, 即遵守转动定律 $M = Ja$ 。

设复摆对水平轴 O 的转动惯量为 J , 复摆的质心 C 到 O 的距离 $OC = h$, 则复摆在某一时刻 (摆角为 θ) 所受到的重力矩为 $M = -mgh \sin \theta$, 当摆角很小时, 有 $\sin \theta \approx \theta$, 所以有

$$M = -mgh\theta$$

由转动定律得

$$-mgh\theta = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

即

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{J}\theta = 0 \quad (9-14)$$

式 (9-14) 中, 令 $\omega^2 = \frac{mgl}{J}$, 并将式 (9-14) 与式 (9-2) 相比较, 可知复摆在摆角很小时的摆动是简谐运动。

例 9-3 一远海洋轮, 质量为 M , 浮在水面时其水平截面积为 S 。设在水面附近海轮的水平截面积近似相等, 如图 9.7 所示。试证明此海轮在水中做的幅度较小的竖直自由振动是简谐振动。

解 选择 C 点代表船体。当船处于静浮状态时, 此时船所受浮力与重力相平衡, 即 $F = \rho gSh = Mg$, 式中, ρ 是水的密度, h 是船体 C 以下的平均深度。

取竖直向下的坐标轴为 y 轴, 坐标原点 O 与 C 点在水面处重合。设船上、下振动的任一瞬时, 船的位置即 C 点的坐标为 y , (y 是船相对水面的位移, 可正可负), 此时船所受浮力为

$$F' = \rho gS(h + y)$$

则作用在船上的合力为

$$\Sigma F = Mg - F' = \rho gSy$$

由 $\Sigma F = M \frac{d^2y}{dt^2}$ 得

$$M \frac{d^2y}{dt^2} = -\rho gSy$$

即

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\rho gS}{M}y = 0$$

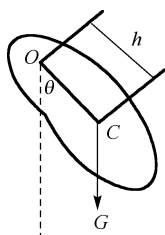


图 9.6 复摆

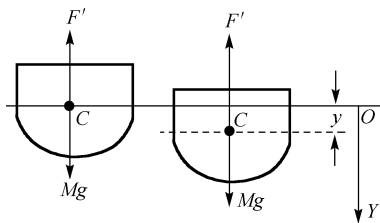


图 9.7 例 9-3 图

式中, M 、 S 、 ρ 、 g 皆为正, 故可令 $\omega^2 = \frac{\rho g S}{M}$, 则

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

可见, 描写船位置的物理量 y 满足简谐振动的动力学方程, 故船在水中所做的小幅度的竖直方向的自由振动是简谐运动。

做简谐运动的物体, 称为**谐振子**。通常把谐振子和连同对它施加回复力的物体一起组成的振动系统, 称为**谐振系统**。

简谐运动是一种理想的运动过程。严格的简谐振动是不存在的, 但对于处于稳定平衡状态的系统, 当它对平衡状态发生微小的偏离后所产生的振动, 在阻力很小可以忽略时, 就可以近似地看作简谐振动。因此, 谐振子是一个重要的理想模型。

例 9-4 由电容 C 、电感 L 所组成的一个回路, 如图 9.8 所示。若给电容器充上一定的电荷 Q , 在忽略电阻的情况下, 就能形成在电路内周期性往返流动的电流, 并引起电容器内的电场和电感线圈中的磁场的周期性变化, 导致无阻尼电磁振荡。进一步的定量研究表明, 在无阻尼的电磁振荡过程中, 电容器极板上的电荷 Q 和电路中的电流 I 皆满足式 (9-2) 的微分方程。即此 LC 电路系统遵循谐振动的规律, 故亦可称为谐振子。

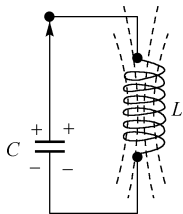


图 9.8 例 9-4 图

另外, 对微观领域中的某些运动也可以利用谐振子的模型进行研究, 如分子、原子、电子的振动等。

由此可见, 谐振动的规律不仅出现于力学范畴, 它还出现于电磁学、原子物理学、光学及其他领域。因此, 一个物理系统, 若描写其状态的物理量符合谐振动的定义式 (9-2), 皆可广义地称为谐振子。

9.3 简谐振动的能量

下面以水平弹簧振子为例来讨论振动系统的能量。设在某一时刻, 物体的位置是 x , 速度为 v , 由式 (9-3b) 及式 (9-4) 知振子的位置 x 及速度 v 分别为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

所以, 质量为 m 的振子在 t 时刻的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

若以平衡位置的势能为零势能点, 则系统的弹性势能为

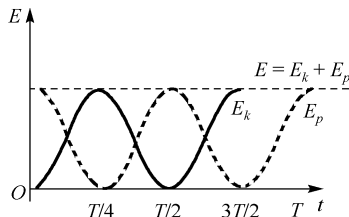
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

同时注意 $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ，所以弹簧振子系统的总能量为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (9-15)$$

该结果说明：虽然弹簧振子的动能和势能都随时间发生周期性的变化，但总能量不随时间变化，即机械能守恒。这一点和弹簧振子在振动过程中只有保守内力做功，没有外力做功时，机械能守恒相符合。弹簧振子系统的总能量和振幅平方成正比，这个结论对于其他简谐运动系统也是正确的。振幅不仅给出了简谐运动的范围，而且还反映了振动系统总能量的大小。

当研究对象做机械运动时，其能量以动能与势能两种形式存在。在机械能守恒时，动能、势能二者相互转化，即动能达最大值时，势能为零，势能达最大值时，动能为零，总能量却保持恒定，如图 9.9 所示。



式 (9-15) 的结论，读者也可以用简谐运动的动力学方程导出^①。

例 9-5 一物体连在弹簧一端在水平面上做谐振动，振幅为 A 。试求 $E_k = \frac{1}{2}E_p$ 的位置。

解 设弹簧的劲度系数为 k ，系统总能量为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

将 $E_k = \frac{1}{2}E_p$ 代入上式，考虑在任意位置时 $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ ，故有

$$E_k + E_p = \frac{3}{2}E_p = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}kx^2$$

解上式可得

$$x = \pm \frac{1}{2}kA^2$$

例 9-6 如图 9.10 所示系统，弹簧的劲度系数 $k = 25 \text{ N/m}$ ，物块 $m_1 = 0.6 \text{ kg}$ ，物块 $m_2 = 0.4 \text{ kg}$ ， m_1 与 m_2 间最大静摩擦系数为 $\mu = 0.5$ ， m_1 与地面之间是光滑的。现将物块拉

^① 提示：由 $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ 变换，有 $mv dv = -kx dx$ 。设初始时刻振子的位置是 x_0 ，速度是 v_0 ，再对等式两边积分。

离平衡位置, 然后任其自由振动, 使 m_2 在振动中不致从 m_1 上滑落, 问系统所能具有的最大振动能量是多少?

解 系统的总能量为

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$



图 9.10 例 9-6 图

当系统运动端位于系统的平衡位置时, 动能达到最大值, 而弹性势能则减小至零, 故存在下式:

$$E_{k\max} = E = \frac{1}{2}kA^2, E_p = 0$$

若想让 m_2 不从 m_1 上滑落, 必须满足

$$m_2 a \leq m_2 g \mu$$

极限情况下 $a_{\max} = g\mu = A\omega^2$, 即

$$A = \frac{g\mu}{\omega^2} = g\mu \cdot \frac{(m_1 + m_2)}{k}$$

故系统最大振动能量为

$$E_{k\max} = \frac{1}{2}k \cdot \left(g\mu \frac{m_1 + m_2}{k} \right)^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)^2 \frac{g^2 \mu^2}{k}$$

代入数据, 得

$$E_{k\max} = \frac{1}{2}(0.6 + 0.4)^2 \times \frac{9.8^2 \times 0.5^2}{25} = 0.48 \text{ J}$$

9.4 简谐振动的合成与分解

9.4.1 两个同方向同频率简谐振动的合成

在实际问题中, 常会遇到一个质点同时参与几个振动的情况。例如, 当两列声波同时传播到空间某一处时, 则该处空气质点就同时参与这两个振动。根据运动叠加原理, 这时质点所做的运动实际上就是这两个振动的合成。也就是说, 物体在任意时刻的位置矢量为物体单独参与每个分振动的位置矢量之和, 即

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \cdots + \mathbf{r}_i + \cdots$$

一般的振动合成问题比较复杂, 下面只研究几种特殊情况的谐振动的合成。

若某质点在一直线上同时参与两个独立的同频率的简谐振动, 且这两个振动的位移方程分别为

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (9-16)$$

式中, A_1 、 A_2 、 φ_1 、 φ_2 分别是两个简谐运动的振幅、初相, x_1 、 x_2 是两个简谐运动的物体相对同一平衡位置的位移。对于这样的两个独立谐振动的合成, 可以采用解析法和旋转矢量图法加以分析。

(1) 解析分析法

假设空间某一点存在两个独立的同频率同振动方向的谐振动, 振动位移 x_1 、 x_2 表示在同一直线方向上、到同一平衡位置的位移, 所以合位移 x 仍在同一直线上, 且为上述两个位移的代数和, 因而, 质点的合振动在任意时刻该的位移为

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

应用三角函数的等式关系将上式展开, 可以转化成

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (9-17)$$

式中, A 和 φ 的值分别为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (9-18)$$

$$\varphi = \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (9-19)$$

由上述方程可以看出, 合振动也是简谐振动, 其振动方向和频率都与原来的两个独立谐振动的振动方向和频率相同, 只是振幅及初相位发生了变化。

(2) 用旋转矢量法推导出合成振动的位移、振幅和相位

对于这种同方向同频率简谐振动的合成, 虽然利用三角公式也不难求得合成结果, 但是利用旋转矢量图可以更直观、更简便地得到两简谐振动的合振动。如图 9.11 所示, A_1 、 A_2 代表两简谐振动的振幅矢量, 由于它们以相同的角速度 ω 绕 O 点逆时针转动, 因此它们之间的夹角 $(\varphi_2 - \varphi_1)$ 保持恒定, 所以在旋转过程中, 矢量合成的平行四边形的形状保持不变, 因而合矢量 A 的长度保持不变, 并以同一角速度 ω 匀速旋转。合矢量 A 就是相应的合振动的振幅矢量, 而合振动的表达式可从合矢量 A 在 x 轴上的投影给出, A 和 φ 也可以由图方便地得到。

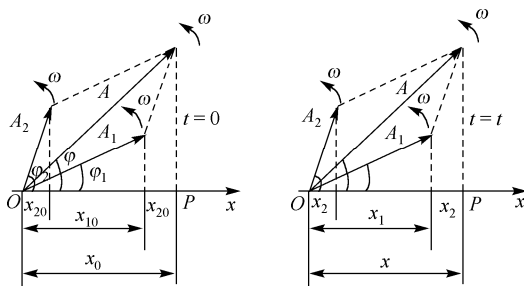


图 9.11 同方向同频率简谐振动的合成

下面分析同方向同频率简谐振动合成的初相差问题。

从式(9-18)可以看出,合振动的振幅 A 除了与原来的两个分振动的振幅有关外,还取决于两个振动的相位差 $(\varphi_2 - \varphi_1)$ 。下面讨论 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 的三种不同情况,这将在研究声、光等波动过程的干涉和衍射现象时,有非常重要的意义。

① 当 $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时,合振动振幅为两个分振动振幅之和,此时合振动的振幅最大,振动加强,即有 $A = A_1 + A_2$ 。

② 当 $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) = (2k+1)\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时,合振动的振幅为两个振幅之差的绝对值,此时合振动振幅最小,振动减弱,即有 $A = |A_1 - A_2|$ 。

③ 在一般情况下, $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)$ 为其他任意值时,合振动的振幅在最大值 $(A_1 + A_2)$ 与最小值 $|A_1 - A_2|$ 之间。

上述讨论表明:两个独立的同频率、同振动方向的谐振动合成时,相位差起着决定性作用。图 9.12 所示为初相位差不同的两个简谐振动的合成情况。

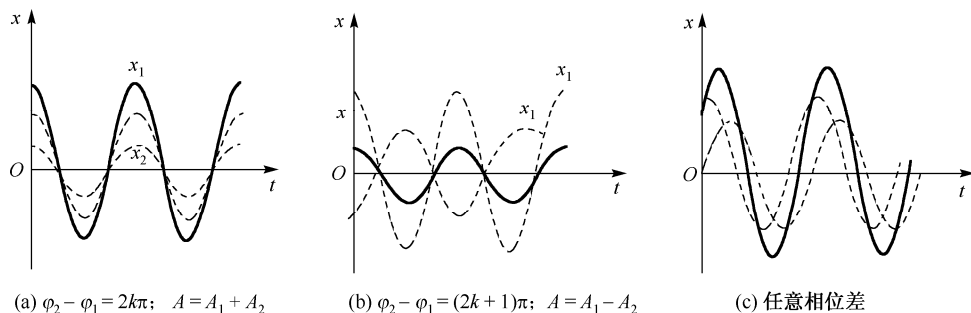


图 9.12 初相位差不同的两个简谐振动的合成

例 9-7 一个质点做简谐振动,振幅为 A ,圆频率为 $\omega = \frac{\pi}{4}$ 。设 $t=0$ 时刻质点在 $\frac{A}{2}$ 处向正方向运动,经过 Δt 时间(在一个周期内)该质点运动到 $-\frac{A}{\sqrt{2}}$ 处且其速度为正,用旋转矢量法(要求画出旋转矢量图)求 Δt 。

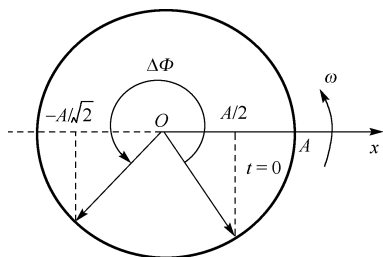


图 9.13 例 9-7 题解图

解 如图 9.13 所示,画出旋转矢量图,可以知道质点从 $\frac{A}{2}$ 处(速度为正)运动到 $\frac{A}{\sqrt{2}}$ 处(速度为正)时旋转矢量转过的角度为

$$\Delta\Phi = \pi + \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{19}{12}\pi$$

已知旋转矢量的旋转角速度(质点振动圆频率)为 $\frac{\pi}{4}$,故需要的时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta \Phi}{\omega} = \frac{\frac{19}{12}\pi}{\frac{\pi}{4}} = \frac{19}{3} \text{ s}$$

9.4.2 两个相互垂直、同频率的简谐振动的合成

当一个质点同时参与两个不同方向的振动时, 质点的位移是这两个振动的位移的矢量和。在一般情况下, 质点将在平面上做曲线运动。质点的轨迹可以是各种形状, 轨迹的形状由两个振动的周期、振幅和相位差来决定。

设两个同频率的简谐振动分别在相互垂直的 x 轴和 y 轴上, 振动方程分别为

$$\begin{aligned} x &= A_x \cos(\omega t + \varphi_x) \\ y &= A_y \cos(\omega t + \varphi_y) \end{aligned} \quad (9-20)$$

在任意时刻 t , 质点的位置是 (x, y) 是时间 t 的函数。将上述两方程参量 t 消去, 就能得到 x 、 y 的关系方程, 即质点运动的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_x A_y} \cos(\varphi_y - \varphi_x) = \sin^2(\varphi_y - \varphi_x) \quad (9-21)$$

在一般情况下, 上述方程是椭圆方程, 因为质点的位移 x 和 y 在有限范围内变动, 所以椭圆轨道不会超出以 $2A_x$ 和 $2A_y$ 为边的矩形范围, 椭圆的具体形状则由相位差 $(\varphi_2 - \varphi_1)$ 决定。以下仅讨论几个特殊相位差的情况。

(1) 当相位差 $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ 时, 即两振动同相, 此时式 (9-21) 变为

$$y = \frac{A_y}{A_x} x$$

此时合振动的轨迹是一条通过坐标原点的直线, 其斜率为这两个振动振幅之比 (见图 9.14(a))。在任意时刻 t , 质点离开平衡位置的位移为

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \cos(\omega t + \varphi)$$

所以合振动也是简谐振动, 振动频率与分振动的频率相同。振幅为 $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ 。

(2) 当相位差 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ 时, 式 (9-21) 变为

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1$$

合振动的轨迹是一以坐标轴为主轴的沿顺时针方向运行的正椭圆 (见图 9.14(b))。

(3) 当相位差 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ 时, 即两振动反相, 此时式 (9-21) 变为

$$y = -\frac{A_y}{A_x} x$$

合振动的轨迹也是一条通过坐标原点的直线, 其斜率为这两个振动振幅之比的负值(见图 9.14(c))。此时, 合振动也是简谐振动, 振动频率与分振动的频率相同。振幅也为 $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ 。

(4) 当相位差 $\varphi_2 - \varphi_1 = 3\pi/2, -\pi/2$ 时, 合振动的轨迹是一以坐标轴为主轴的沿逆时针方向运的正椭圆(见图 9.14(d))。

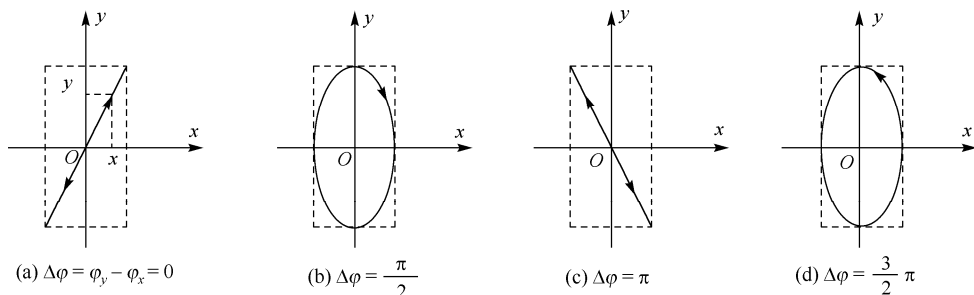


图 9.14 两个互相垂直的同频率的简谐运动的合成

(5) 当两个等幅 ($A_x = A_y$) 的振动且相位差为 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi/2$ 时, 椭圆将变为圆(见图 9.15(a)、(b))。

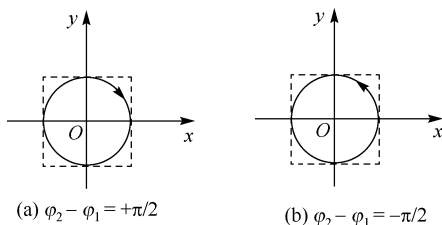


图 9.15 两个等幅的、相位差为 $\pm\pi/2$ 的相互垂直的同频率的简谐运动的合成

总之, 两个相互垂直的同频率的简谐振动合成时, 合运动的轨道是椭圆。椭圆的性质视两个振动的相位差 $\varphi_2 - \varphi_1$ 而定。图 9.16 表示不同相位差的合成图形。

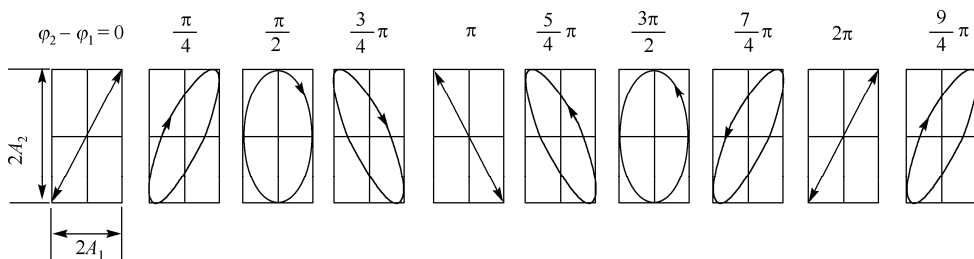


图 9.16 两个不同振幅的、不同相位差的相互垂直的同频率的简谐运动的合成

9.4.3 两个同方向不同频率简谐振动的合成

当两个同方向、不同频率的简谐运动合成时，由于这两个分振动的频率不同，因而它们的相位差随时间改变，合振动一般不再是简谐运动，通常情况比较复杂。这里只讨论两个简谐运动的频率 ν_1 、 ν_2 都较大，而两频率之差 $|\nu_2 - \nu_1| \ll \nu_2 + \nu_1$ 却很小时的合成情况。

(1) 合振动的相差是时间的函数，故合成振动为非简谐振动

设某物体同时参与了在同一直线（ x 轴）上的两个频率相近的简谐振动，并且这两个简谐运动分别为

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (9-22)$$

与同方向同频率简谐振动合成的相同点是，物体所参与的合振动必然在同一直线上，合位移 x 应等于两个分位移 x_1 和 x_2 的代数和，即

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (9-23)$$

与同方向同频率简谐振动合成不同的是，这时的合振动不再是简谐振动了，而是一种复杂的振动。为简便起见，假定两个简谐振动的振幅和初相位分别相同，为 A 和 φ 。由三角函数的和差化积关系，可将式（9-23）转化为

$$x = \left[2A \cos 2\pi \left(\frac{\nu_2 - \nu_1}{2} \right) t \right] \cos \left(2\pi \frac{\nu_2 + \nu_1}{2} t + \varphi \right) \quad (9-24)$$

在式（9-24）中，如果 $|\nu_2 - \nu_1| \ll \nu_2 + \nu_1$ ，即简谐运动的圆频率 ν_1 、 ν_2 都较大，但两频率之差却很小，就可把 $\frac{\nu_2 + \nu_1}{2}$ 看作合振动的频率， $\left| 2A \cos 2\pi \left(\frac{\nu_2 - \nu_1}{2} \right) t \right|$ 看作合振动的振幅。由此可见，式（9-24）合振动的振幅随时间做缓慢的周期性变化，从而出现振幅时大时小的现象。把这种由于两个分振动频率的微小差异而产生的合振动振幅时而加强，时而减弱的现象，称为**拍现象**，如图 9.17 所示。合振动在单位时间内加强或减弱的次数称为**拍频**，表示为

$$\nu = \nu_2 - \nu_1 \quad (9-25)$$

可见，拍频的数值为两个分振动的频率之差，合振幅变化的周期为 $T = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}$ 。两个

同方向、不同频率的简谐运动合成时，合振动是振幅为周期性变化的复杂振动。

这种合振动的大致情况也可以用矢量图示法加以分析。设两个分振动分别对应于旋转矢量 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_2 。由于这两个旋转矢量绕 O 点转动的角速度不同，所以它们之间的夹角随时间而变化。假如在某一瞬间，旋转矢量 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 和它们的合矢量 \mathbf{a} 的位置由图 9.18 所示，而在以后的某一瞬间，旋转矢量 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_2 分别到达 \mathbf{a}'_1 和 \mathbf{a}'_2 的位置，它们的合矢量变为 \mathbf{a}' 。在这两个任意时刻，由于两个分振动所对应的旋转矢量的夹角不同，所以合矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{a}' 的长度

也不同,合矢量所对应的合振动的振幅自然也不一样。由此可以断定,合振动是振幅随时间变化的振动。

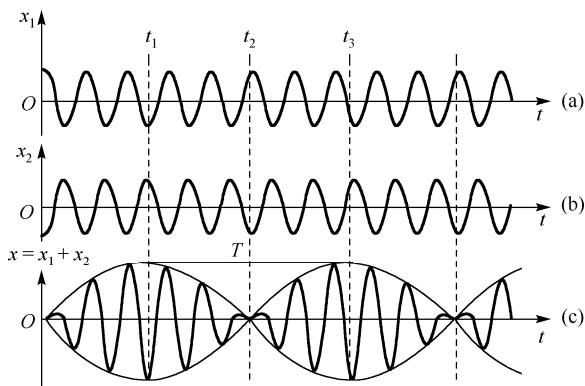


图 9.17 拍现象

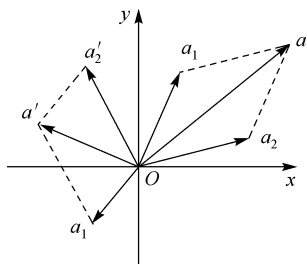


图 9.18 二分振动的频率为整数关系时的矢量分析图示方法

设在 t 时刻, 旋转矢量 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_2 之间的夹角为 $2\pi(\nu_2 - \nu_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)$, 则合矢量 \mathbf{a} 的长度, 即合振动的振幅为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2[(\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)]} \quad (9-26)$$

由此可见, 合振动的振幅随时间在最大值 $(A_1 + A_2)$ 和最小值 $|A_1 - A_2|$ 之间变化。如果 $\omega_2 > \omega_1$, 或者分振动的频率 $\nu_2 > \nu_1$, 那么每秒钟旋转矢量 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_2 绕 O 点的转数不同, 这样在一定时间内就会出现一次两者方向相同的机会和一次两者方向相反的机会, 即单位时间内应出现 $(\nu_2 - \nu_1)$ 次同方向的机会和 $(\nu_2 - \nu_1)$ 次反方向的机会。

当 \mathbf{a}_1 与 \mathbf{a}_2 同方向时, 合振动的振幅为 $(A_1 + A_2)$; 而 \mathbf{a}_1 与 \mathbf{a}_2 反方向时, 合振动的振幅为 $|A_1 - A_2|$ 。这就是上面所述的**拍现象**。

所以, 式 (9-24) 就是拍现象的数学表达式。

9.5 阻尼振动 受迫振动 共振

9.5.1 阻尼振动

将一个弹簧振子或一只单摆放在空气中, 由于空气阻力等的作用, 它们围绕平衡位置振动的振幅将逐渐减小, 最后终将停止下来。如果把它们浸在液体里, 它们在振动时受到的阻力就更大, 这时可以看到它的振幅急剧减小, 振动几次以后, 很快就会停止。当阻力足够大, 振动物体甚至来不及完成一次振动就停止在平衡位置上了。这种在回复力和阻力作用下使振幅随时间减小的振动称为**阻尼振动**。前面所讨论的简谐运动, 实际上是一个振

动物体不受任何阻力的影响，而只在回复力作用下所做的振动，是一种理想的情况，称为**无阻尼自由振动**。

在阻尼振动中，振动系统所具有的能量将在振动过程中逐渐减少，能量损失的原因通常有摩擦阻尼与辐射阻尼两种。振动物体在介质中振动时，由于介质对振动物体的摩擦阻力，使得振动系统的能量逐渐转变为热能而散失出去，称为**摩擦阻尼**。另外，振动物体在振动的过程中，会引起邻近质点的振动，从而使系统的能量逐渐向四周辐射出去，转变为波动的能量，称为**辐射阻尼**。下面仅讨论摩擦阻尼这一种简单情况，并以弹簧振子为例建立摩擦阻尼振动的运动学方程。

设弹簧振子受到的阻尼力与速度成正比，为

$$F_b = -bv = -b \frac{dx}{dt}$$

式中， b 为阻尼常数，则物体的运动方程为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (9-27)$$

此微分方程的解为

$$x = A_0 e^{-\frac{bt}{2m}} \cos(\omega' t + \varphi'_0) \quad (9-28)$$

式中， A_0 和 φ'_0 为积分常数，由初始条件决定。式 (9-28) 说明，阻尼振动的位移为两时间因子项的乘积，其中 $A_0 e^{-\frac{bt}{2m}}$ 因子反映阻尼对振幅的影响，振幅按指数规律减小；而 $\cos(\omega' t + \varphi'_0)$ 因子正反映了在弹性力和阻尼力作用下的周期运动；由此可知，式 (9-28) 所表示的是一个振幅随时间减小的简谐振动，称为**阻尼简谐运动**，振动曲线如图 9.19 所示。从该振动曲线可以看到，在一个位移极大值之后，间隔一定时间，就出现下一个较小的极大值，这个相继两次通过极大（或极小）位置所经历的时间称为阻尼振动的周期，表示为

$$T = \frac{2\pi}{\omega'} \quad (9-29a)$$

其中， ω' 是阻尼振动的角频率，并且

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}, \quad (\text{注意，对弹簧振子 } \omega_0^2 = \frac{k}{m}).$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}} \quad (9-29b)$$

这就是说，由于阻尼，振动变慢了。

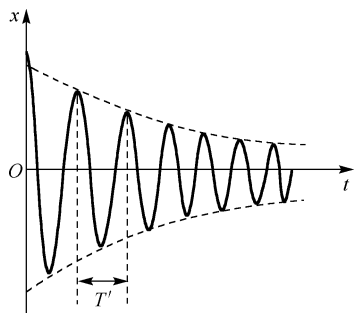


图 9.19 阻尼振动的位移与时间的关系

从式(9-28)看出, 如果阻尼常数 $b=0$, 此时 $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$, 这时振动就变为没有阻力的振动了, 则称为**无阻尼振动**; 如果阻尼常数较小, 但不为零, 即 $b \ll \sqrt{km}$, $\omega' \approx \omega_0$, 这时振动接近于简谐振动。在阻尼振动中, 如果阻尼很大, 即 $\frac{b}{2m} > \omega_0$ 时, 式(9-28)不

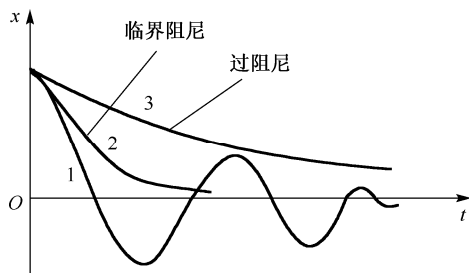


图 9.20 不同阻尼下的阻尼振动和
阻尼过大时的非周期运动

再是式(9-27)的解, 此时物体以非周期运动的方式慢慢回到平衡位置, 这种情况称为**过阻尼振动**。如图 9.20 中曲线 3 所示; 当阻尼满足 $\frac{b}{2m} = \omega_0$

时, 振动物体将刚好能平滑地回到平衡位置, 此种情况称为**临界阻尼振动**, 如图 9.20 中曲线 2 所示; 在 $\frac{b}{2m} < \omega_0$ 的条件下, 前面已详细描述, 阻尼

振动的振幅 $A_0 e^{-\beta t}$ (β 为阻力系数) 随时间 t 呈指数衰减, 这种情况又叫**减幅振动**, 如图 9.20 中曲线 1 所示。

9.5.2 受迫振动

在实际的振动系统中, 阻尼总是客观存在的。所以实际的振动物体如果没有能量的不断补充, 振动最后总是要停止下来的。如果要使振动持续不断地进行下去, 那么必须对系统施加一个周期性的外力, 这种系统在周期性外力持续作用下所发生的振动, 称为**受迫振动**。如声波引起耳膜的振动, 悬垂的钟摆的振动, 等等。这种周期性的外力称为**驱动力**。

为简单起见, 假设一系统在弹性力 $-kx$ 、阻力 $-\gamma v$ 和驱动力 $F_0 \cos \omega t$ 的作用下做受迫振动。根据牛顿第二定律, 有

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t \quad (9-30)$$

式中, F_0 是驱动力的幅值, ω 为驱动力角频率。对于某一确定系统, 式(9-30)中的 m 、 k 、 γ 、 F_0 、 ω 等量分别为恒定。令 $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\frac{\gamma}{m} = 2\beta$, 则式(9-30)可写成

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (9-31)$$

在阻尼较小的情况下, 该微分方程的解是

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi') + A \cos(\omega t + \varphi) \quad (9-32)$$

即受迫振动是由阻尼振动 $x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi')$ 和谐振动 $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ 合成的。

实际上, 在驱动力开始作用时受迫振动的情况是相当复杂的, 经过不太长的时间, 阻尼振动就衰减到可以忽略不计, 即式 (9-32) 右边第一项趋于零, 受迫振动达到稳定状态。这时, 振动的周期即为驱动力的周期, 振动的振幅保持稳定不变。于是受迫振动为谐振动, 其振动表达式为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (9-33)$$

应当指出, 稳态时的受迫振动的表达式虽然和无阻尼自由振动的表达式相同, 都是简谐振动, 但其实质已有所不同。首先, 受迫振动的角频率不是振子的固有角频率, 而是驱动力的角频率; 其次, 受迫振动的振幅和初相位不是取决于振子的初始状态, 而是依赖于振子的性质、阻尼的大小和驱动力的特征。\$A\$、\$\varphi\$ 由下述两式决定:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (9-34)$$

$$\tan\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (9-36)$$

从能量角度看, 当受迫振动达到稳定后, 周期性外力在一个周期内对振动系统做功而提供的能量, 恰好用来补偿系统在一个周期内克服阻尼力所消耗的能量, 因而使受迫振动的振幅保持稳定不变。

9.5.3 共振

由式 (9-34) 可知, 稳定状态下受迫振动的一个重要特点是: 振幅 \$A\$ 的大小与驱动力的角频率 \$\omega\$ 有很大的关系。\$\omega_0\$ 是振动系统的固有角频率。当驱动力的角频率 \$\omega\$ 与振动系统的固有角频率 \$\omega_0\$ 相差较大时, 受迫振动的振幅 \$A\$ 较小, 而当 \$\omega\$ 与 \$\omega_0\$ 相接近时, 振幅 \$A\$ 逐渐增大, 在 \$\omega\$ 为某一定值时, 振幅 \$A\$ 达到最大。把驱动力的角频率为某一定值时, 受迫振动的振幅达到极大的现象称为**共振**。共振时的角频率称为共振角频率, 以 \$\omega_r\$ 表示。对式 (9-34)

求导数, 并令 \$\frac{dA}{d\omega} = 0\$, 即可得到共振角频率

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (9-37)$$

因此, 系统的共振频率是由固有频率 \$\omega_0\$ 和阻尼系数 \$\beta\$ 决定的, 将式 (9-37) 代入式 (9-34) 可得共振时的振幅为

$$A_r = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (9-38)$$

由式 (9-38) 可知, 阻尼系数越小, 共振角频率 \$\omega_r\$ 越接近系统的固有角频率 \$\omega_0\$, 同时共振的振幅 \$A_r\$ 也越大。若阻尼系数趋于零, 则 \$\omega_r\$ 趋近于 \$\omega_0\$, 振幅将趋于无穷大。

受迫振动的速度在一定条件下也可以发生共振,称为速度共振。将速度振幅对 ω_d 求导,令 $\frac{dv_m}{d\omega_d} = 0$, 得

$$\omega_r = \omega_0 \quad (9-39)$$

驱动力的频率等于系统固有频率时,速度幅值达到最大;在给定幅值的周期性外力的作用下,阻尼越小,速度幅值越大,如图 9.21 所示。

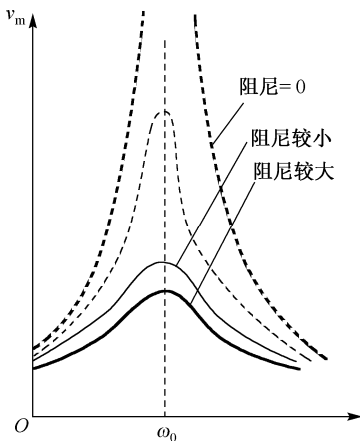


图 9.21 速度共振

9.6 电磁振荡

电路中电压与电流的周期性变化称为**电磁振荡**。电磁振荡和机械振动有着类似的运动形式,产生电磁振荡的电路称为振荡电路。最简单的振荡电路是由一个电容器和一个自感线圈串联而成的,称为 LC 电路。

9.6.1 LC 振荡器

如图 9.22 所示的电路中,先将电键倒向 a 端,给电容器充电,然后将电键连接到 b 端接通 LC 回路。在 b 接通的瞬间,电容器两极板上电荷最多,两极板间的电场强度最强,电场的能量全部集中在电容器的两个极板间。

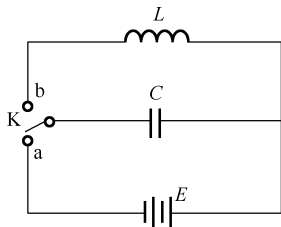


图 9.22 LC 振荡器

当电容器开始放电时,由于自感的存在,电路中的电流将会增大到最大值。两极板上的电荷也将会相应地减小到零。在这个过程中,电流会在自感线圈中激起磁场,直到放电结束时,电容器两极板间的电能全部转换为线圈中的磁场能量。

电容器放电完毕时,电路中电流值达到最大值。这时,由于线圈的自感作用,会对电容器反向充电。结果,在电容器两极板上正、负电荷发生变化,同样由于线圈的自感作用,电流将逐渐减小到零,从而电容器两个极板上的电荷又相应地逐渐增加到最大值,磁场能量又将全部转换成电场能量。

然后,电容器又会通过线圈放电,只是此时的放电方向与前次放电方向相反。电路中的电流又会逐渐增大,两极板上的电荷再次相应地减小到零,电容器两极板间的电能再一次全部转换为线圈中的磁能。

此后,电容器又被充电,回复到原状态。这样电路就完成了一个完全的振荡过程。

从上面的分析可以看出,在 LC 电路中,电荷和电流都随时间做周期性的变化,相应地电容器中的电场强度和线圈中的磁感应强度以及电场能量和磁场能量也都随时间做周期

性变化, 且不断地相互转换着。这种电荷和电流、电场和磁场随时间周期性变化的现象, 称为电磁振荡。若电路中没有任何的能量损失, 那么在电路中, 相应物理量的周期性变换过程将一直持续下去, 这种电磁振荡, 称为**无阻尼自由电磁振荡** (也称**自由振荡**)。

9.6.2 无阻尼电磁振荡及振荡方程

下面定量的研究 LC 电路中电容器极板上的电荷和电路中电流随时间变化的规律。设电路的电阻为零, 并在某一时刻电路中的电流为 i , 电容器上极板的电荷量为 q 。从电路中可以看出, 在任一瞬时, 线圈上的电势差和电容器两极板之间的电势差相等, 则根据欧姆定律有

$$-L \frac{di}{dt} = \frac{q}{C}$$

其中电流 $i = \frac{dq}{dt}$, 代入上式后可得

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{q}{LC} \quad (9-40)$$

令 $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, 于是得

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\omega^2 q$$

解此微分方程可得到电容器两极板所带电荷量的振荡方程为

$$q = Q_0 \cos(\omega t + \phi_0) \quad (9-41)$$

其中, Q_0 为电容器极板上电荷量的最大值, 称为电荷量振幅, ϕ_0 是振荡的初相位。 ω 和 ϕ_0 的数值由初始条件决定。 ω 是振荡的角频率。自由振荡的频率和周期分别为

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (9-42)$$

将式 (9-41) 对时间求导数, 就可以得到电路中任一时刻的电流振荡方程为

$$i = -I_0 \sin(\omega t + \phi_0) = I_0 \cos\left(\omega t + \phi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (9-43)$$

观察式 (9-41) 和式 (9-43), 可知 LC 振荡电路中电荷和电流都做等幅的谐振动, 且二者的振荡频率相同, 电流的相位比电荷的相位超前 $\pi/2$, 如图 9.23 所示。

最后, 考虑 LC 振荡电路中的能量变化特征。在任一时刻 t , 电容器极板上的电荷量为 q , 电路中的电流为 i , 相应的电场能量和线圈内磁场能量分别为

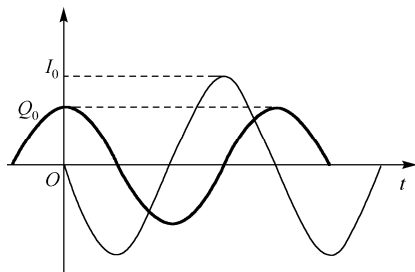


图 9.23 LC 振荡器

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$W_m = \frac{Li^2}{2} = \frac{L\omega^2 Q_0^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

把电场能量和磁场能量相加,可以发现,虽然自由振荡电路中电能和磁能都随时间发生变化,但总的电磁能却保持守恒,即

$$W_e + W_m = \frac{Q_0^2}{2C} \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{L\omega^2 Q_0^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{Q_0^2}{2C} \quad (9-44)$$

*9.7 非线性振动

非线性振动是指恢复力与位移不成正比或阻尼力不与速度成正比的系统的振动。尽管线性振动理论早已相当完善,在工程上也已取得广泛且卓有成效的应用,但在实际问题中,总有一些用线性理论无法解释的现象。一般地,线性模型只适用于小运动范围,超出这一范围,按线性问题处理就不仅在量上会引起较大误差,而且有时还会出现质的差异,这就促使人们研究非线性振动。

9.7.1 非线性振动简介

一般来说,线性振动只适用于小运动范围,超过此范围,就变成非线性振动。非线性系统的运动微分方程是非线性的,不能用叠加原理求解。方程中不显含时间的非线性系统称为非线性自治系统;显含时间的称为非线性非自治系统。保守非线性自治系统的自由振动仍是周期性的,但其周期依赖于振幅。对于渐硬弹簧,振幅越大,周期越短;对于渐软弹簧,振幅越大,周期越长。非保守非线性自治系统具有非线性阻尼,阻尼系数随运动而变化,因而有可能在某个中间振幅下等效阻尼为零,从而能把外界非振动性能量转变为振动激励而建立起稳定的自激振动(简称自振)。弦乐器和钟表是常见的自振系统。周期地改变系统的某个参量而激起系统的大幅振动称参变激发。当系统的固有频率等于或接近参量变化频率的一半时,参变激发现象最易产生。具有非线性恢复力的系统受到谐激励时,其定常受迫振动存在跳跃现象,即激励频率 ω 缓慢变化时,响应振幅一般也平稳变化,但通过某些特定 ω 值时,振幅会发生跳跃突变。具有非线性恢复力且固有频率为 ωn 的系统,在受到频率为 ω 的谐激励时,有可能产生频率为 ω/n ($\approx \omega n$)的定常受迫振动(n 为正整数),称为亚谐共振或分频共振。它的出现不仅与系统和激励的参数有关,而且依赖于初始条件。亚谐共振可以解释为,由于非线性系统的响应不是谐和的,频率 ω/n 的响应中存在频率为 ω 的高次谐波,激励对高次谐波做功而维持了振动。干扰力频率接近自振系统固有频率到一定程度时,所激起的振动中只包含干扰力频率而自振频率被俘获的现象称为同

步。同步现象已应用于振荡器的稳频和振动机械的同步激振。近年来发现,非线性系统中还会出现类似随机而对初始条件极为敏感的运动,称为混沌。上述现象都无法用线性理论加以解释。机械和结构的自激振动、亚谐共振等一般都能造成危害,必须防止。另一方面,自激振动、同步等现象也在物理学和工程技术中已得到应用。

9.7.2 非线性特征

了解非线性振动的一些典型特征,对非线性问题的处理以及非线性振动理论的应用,都会有所启发。

1. 固有频率特性

线性系统的固有频率不依赖于运动的初始条件,而只与系统的参量(质量与刚度)有关。非线性振动系统则不然。由于刚度随变形大小而变化,因而系统的固有频率也随运动幅度大小而变化。刚度随变形增大而增大的弹簧,称为渐硬弹簧;反之,称为渐软弹簧。渐硬非线性系统的固有频率随振幅变大而变大;渐软非线性系统则相反。

2. 自激振动

非线性自治系统具有等效负阻尼时,调节等效阻尼到零的情况下所存在的定常周期振动称为自激振动。自治系统是指运动微分方程中不显含时间 t 的系统。在线性自治系统中出现的运动形式只有三种:发散型,保守型和衰减型。发散型对应于负阻尼情形,保守型对应于无阻尼情形,衰减型对应于正阻尼情形。只在保守情况下,系统的运动才是谐和的,按能量大小,形成一族振幅连续分布的(非孤立的)周期运动。

非线性自治系统,除了在保守情况仍有非孤立的周期运动外,在非保守情况下也可能出现孤立的周期运动。当阻尼为非线性时,阻尼系数随运动而变化,因而有可能在小振幅下,等效阻尼是负的;在大振幅下,等效阻尼是正的;在某个中间的振幅,相应的等效阻尼为零,与此相应地,存在一个定常周期振动,称为自激振动,简称自振。这种振动是孤立的,其幅值变化和周期仅取决于系统参量,在一定范围内与初始状态无关。

弱非线性系统的自振是接近于谐和的,强非线性系统的自振则是远离谐和的。后者在振动中,缓慢地积累能量的过程与几乎是瞬时地释放能量的过程交替进行,因而形象地称为张弛振动。

3. 跳跃现象

非线性系统的振幅(A)对谐和外扰频率(ω)的曲线可以有几个分支,缓慢地变动扰动频率,在某些频率将出现振幅的突变现象。和线性系统不同,描述非线性系统的微分方程在同一组参量下可能有多个周期解,而只有那些满足稳定性条件的解,才对应物理上可实现的运动。在非线性系统中,运动的多样性和稳定性不可忽视。

具有非线性恢复力的系统在谐和外扰作用下的定常响应曲线，往往在某些频带上有几个分支，因而对应于同一个扰频，可以有几个不同幅值的稳定的定常受迫振动。若扰力的幅值保持不变，而其频率缓慢地改变，则当扰频变到某些值，两个定态振动之间就发生跳跃现象。因此，跳跃现象又称振动回滞。如果保持扰频不变，而缓慢地改变扰力幅度，也可能出现类似的跳跃现象。

4. 亚谐共振

干扰力作用于非线性系统所激发的频率比干扰频率低整数倍的大幅度振动。固有频率为 $\omega_n \approx \omega/n$ (n 为正整数)。对于线性系统，在频率为 ω 的谐和外扰作用下，只能产生频率为 ω 的定常受迫振动。但具有非线性恢复力且固有频率接近于 ω_n 的系统，在受到频率为 ω 的谐和外扰时，有可能产生频率为 ω/n 的定常受迫振动，称为亚谐共振或分频共振。理论和实验研究证明，亚谐共振的出现，不仅依赖于系统的参量，而且还依赖于初始条件。

自振系统在谐和外扰作用下，也可能产生亚谐共振。亚谐共振可解释为，由于外扰对自由振动高谐分量所做的功而维持的受迫振动。

5. 同步现象

当干扰力频率接近自振系统固有频率到一定程度时，所激起的振动中只包含干扰力频率而自振频率被俘获的现象称为同步现象。17 世纪，惠更斯已观察到：快慢稍微不同的两只时钟，挂在同一壁板上会保持同步计时。

在自振频率为 ω_0 的电子管振荡器中，设在栅极回路加上频率为 ω 的激励，则在 ω 接近 ω_0 时，按线性理论，输出中必然有拍频为 $|\omega - \omega_0|$ 的信号。实际上，当 $|\omega - \omega_0|$ 小于某个阈限时，拍频就突然消失，只剩下频率为 ω 的输出，即自振和受迫振动发生同步，或者说自振频率被扰频所俘获，因而这一现象也称为频率俘获。

同步现象已被有效地利用于振荡器的稳频以及振动机械的同步激振。同步现象不仅出现在扰频和自振频率相近的区域，在一定条件下，也可出现在扰频的整分数倍和自振频率相近的区域，这种现象称为亚谐同步。

6. 参变激发

周期地改变系统的某个参量而激起系统的大幅振动称为参变激发。例如，单摆支点做铅垂振动时，摆的下铅垂平衡位置在一定条件下会丧失稳定性。当系统的固有频率等于或接近参量变化频率的一半时，参变激发现象最易产生。

7. 参变镇定

参量的周期变化使系统稳定的现象称为参变镇定。例如，倒立摆支点沿铅垂方向做适当振动时，摆的上铅垂平衡位置有可能变成稳定的。

对于非线性系统, 叠加原理不再适用, 因而非线性问题没有一般的解法。通常只能用一些特殊方法来探索非线性系统的重要运动, 这些方法又分为定性和定量两类, 两者相辅相成。

本章提要

1. 简谐运动

物体运动时, 如果离开平衡位置的位移(或角位移)按余弦函数(或正弦函数)的规律随时间变化, 这种运动称为简谐运动(简称谐振动)。

简谐运动的判据:

判据 1: $f = -kx$ (动力学特征);

判据 2: $a = -\omega^2 x$;

判据 3: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ (运动学特征), 式中 A 、 ω 、 φ 为常量。

2. 描述简谐运动的三个特征量

振幅 A : 限定做简谐运动的物体的运动范围, 取决于振动物体的能量。

周期 T 和频率 ν : 决定振动系统的性质, 周期与频率的关系为 $\nu = \frac{1}{T}$ (或用 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 表示)。

初相: 决定振动物体的初始状态。

简谐运动的三个特征量确定后, 简谐振动的运动规律就完全确定了。

振动物体的振幅、初相由初始条件决定, 分别为

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad \text{和} \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

3. 简谐运动的能量

简谐运动系统的动能、势能都随时间变化, 动能达到最大值时, 势能为零, 势能达到最大值时, 动能为零, 但系统的总机械能守恒, 即 $E = E_k + E_p = \text{常量}$ 。

$$\text{动能:} \quad E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$\text{弹性势能:} \quad E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$\text{机械能:} \quad E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

4. 几种简谐运动

(1) 弹簧振子: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

(2) 单摆小角度摆动: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

(3) 复摆: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{J}\theta = 0$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgh}}$, 式中, h 是质心到转轴的距离, J

是刚体对给定转轴的转动惯量。

5. 简谐运动的旋转矢量表示法

简谐运动三个特征量 (A 、 ω 、 φ) 的物理意义可用旋转矢量法表示。

6. 简谐运动的合成

(1) 两个同频率的一维简谐运动的合成

函数运算法: 空间某一质点同时参与沿同一方向 (x 轴) 的两个独立的同频率的简谐运动位移方程为 $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10})$ 和 $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$, 用三角函数运算可得到它们的合振动方程、振幅、相差为

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})}$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_{10} + A_2 \sin \varphi_{20}}{A_1 \cos \varphi_{10} + A_2 \cos \varphi_{20}}$$

可见合成后的运动仍然是频率不变的简谐运动, 其中合振幅为 A , 合振动的初相为 φ 。

(2) 两个不同频率的一维谐振动的合成

当 $\omega_1 \neq \omega_2$ 时, 合振动的振幅 A 和角速度 ω 均为时间的函数, 这种情形表现为非简谐运动。

当 $\omega_1 \approx \omega_2$ 时, 两分振动频率相差很小时, 振幅时而加强, 时而减弱, 产生拍现象, 其振幅变化的频率称为拍频。两分振动合成后的表达式和拍频为

$$x = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi_0\right), \quad \nu = \frac{1}{\tau} = \left|\frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}\right| = |\nu_2 - \nu_1|$$

7. 阻尼振动、受迫振动和共振

(1) 振动物体受到阻力作用时, 振动系统的能量不断减小, 因而振幅也随时间而减小。

若振动物体的质量为 m ，在弹性力（或准弹性力）和阻力作用下运动，则物体的运动学方程为

$$x = A_0 e^{-\frac{\beta t}{2m}} \cos(\omega' t + \varphi'_0)$$

式中， $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ ， A_0 和 φ' 为积分常数。余弦项表征了在弹性力和阻力作用下的周期运动， $e^{-\beta t}$ 反映了阻尼对振幅的影响，因此阻尼振动是准周期振动。

(2) 受迫振动

受迫振动是指物体在周期性外力的持续作用下发生的振动。受迫振动稳定后，外力做功提供的能量等于系统克服阻尼所消耗的能量，因而受迫振动的振幅能保持不变，也就是等幅振动。受迫振动与简谐运动的区别在于，简谐运动的角频率由系统本身的性质决定，而受迫振动的角频率等于驱动力的角频率，一般驱动力形式为

$$F = F_0 \cos \omega_d t$$

运动方程为

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi'_0) + A \cos(\omega_d t + \varphi)$$

(3) 共振

对于受迫振动，当外力幅值恒定，稳定态振幅随驱动力的频率而变化。当驱动力的角频率等于某个特定值时，受迫振动的振幅或速率达到最大值的现象称为共振。共振时的角频率（共振频率 ω_r ）为

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$\frac{\gamma}{m} = 2\beta$ 为阻尼系数。

8. LC 振荡器

LC 振荡器就是一个非力学的简谐运动。在电路中，电流、电压、电荷量、电场强度和磁场强度等物理量都可能在某一定值附近随时间周期性地变化，这类变化统称为振动，电磁振荡。电磁振荡与机械振动有相似的规律。

阅读材料

电子显微镜

微观粒子的波动性已经在现代科学技术上得到应用。一个常见的应用例子就是电子显微镜。电子显微镜是根据电子光学原理，先通过电子与物质相互作用，使电子透过样

品或在样品上反射而获得相关的衍射光速; 然后电子经过电场和磁场的聚焦(电子透镜代替光学透镜)作用, 显示出物质材料的结构图像。电子与物质相互作用产生信息的过程如图 9.24(a)所示。这种图像能使物质的细微结构在非常高的放大倍数下成像, 而显示出物质材料的结构图像。通常电子显微镜可分为 3 种类型: 透射式电镜(TEM), 扫描式电镜(SEM)和扫描透射式电镜(STEM)。TEM 和 SEM 是两种基本类型的电子显微镜, 其基本原理如图 9.24(b)所示。

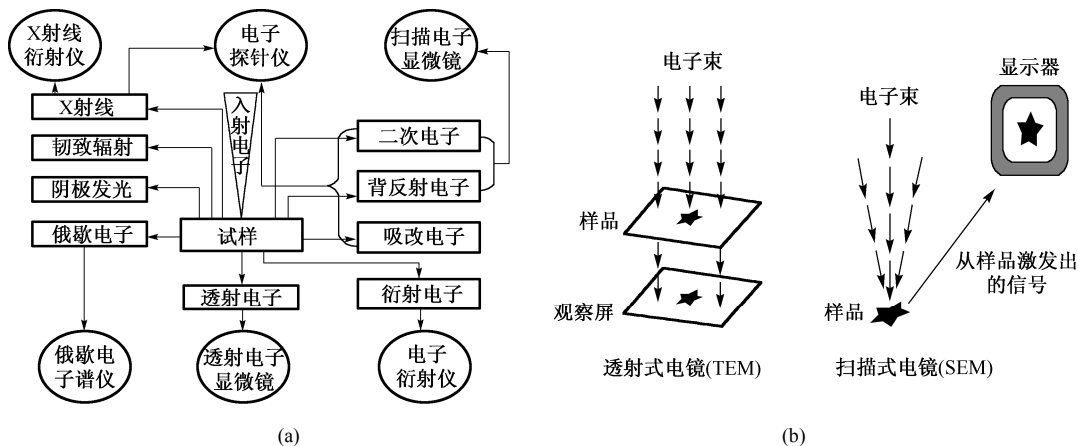


图 9.24 (a)电子与物质相互作用产生的信息; (b)两种基本类型的电镜成像示意图

1. 透射式电镜(TEM)

透射式电镜是靠穿透样品的电子束进行成像放大的, 样品内部的结构是通过空间密度的不同反映出来的, 密度大的地方阻挡和吸收的电子多, 透过电子少; 结构稀疏处密度小, 透过电子多。这样在透射电子束的横截面上电子密度的疏与密的分布便对应了样品结构密度的密与疏的关系, 也就是说, 透过电子束的密度变化也包含了样品结构的信息, 见图 9.24 (a)。透射式电镜研制最早, 使用最为广泛, 具有以下几个特点: ①成像分辨率最高, 现在研制的 TEM 已达到 0.1 nm; ②对样品厚度有一定要求, 通常在 30~50 nm 左右, 太厚则电子束不易穿透, 无法满足观察和拍摄时对亮度的要求, 且样品结构重叠过多, 会影响影像的清晰度; 样品太薄则影响对电子束照射轰击的耐受性, 造成热损伤和污染; ③放大率的范围相对较窄, 由于透射工作方式的特点, 一般不能从高倍率连续变化到很低的倍率, 通常在几百倍以下放大时必须更换透镜的工作方式(由仪器自动切换)。

2. 扫描式电镜(SEM)

扫描式电镜是把电子束会聚成很细的束点, 称为电子探针(实际上要远比针尖尖细得多), 像写字一样逐行逐点地在样品表面扫描, 然后把激发出来的二次电子收集起来, 将二次电子所携带的样品表面的信息处理成影像, 在显示器上显现出来, 成像的方式是间接

的, 见图 9.24 (b)。SEM 的使用相当广泛, 研制工艺也较为成熟。其特点如下: ①由于电子探针没有穿过样品内部, 只在表面激发出二次电子, 所以主要被用来观察样品表面或断裂面的结构形态; ②景深比 TEM 长, 富有立体感; ③放大率范围宽, 可以从几十倍连续变化到几十万倍; ④对样品制作要求简单, 适应性强; 甚至有些硬质干燥的样品几乎可以不用处理而直接观察; ⑤由于电子探针不停地做扫描运动, 不会长久地对样品上所有点同时轰击, 所以对样品的损伤比 TEM 小得多; ⑥样品室活动范围大, 对样品的大小、高度和形态的适应性强; TEM 样品通常只能装载在直径 3 mm 左右的铜网上, 而 SEM 的样品室甚至可以容载下直径为 10 cm 的样品; ⑦分辨率低于同档次的 TEM。

3. 扫描透射式电镜 (STEM)

扫描透射式电镜也是利用电子探针在样品表面做扫描运动, 但不接收二次电子, 而是在样品另一面接收透过样品的透射电子, 然后加以处理, 显示出影像。最终像 SEM 一样显现在显像管的荧光屏上。其特点如下: ①成像较好, 分辨本领介于 TEM 和 SEM 之间; ②与 SEM 一样, 对样品的损伤小; ③要求样品较薄, 易于穿透; ④能将透射电子中的弹性散射电子与损失了一定能量的非弹性散射电子区别开, 并加以对比分析处理, 得到 TEM 和 SEM 检测不到的信息; ⑤尤其便于与 SEM 结合做同一部位的观察对比。

TEM 和 SEM 是电子显微镜的 2 种最基本的类型, 应用较为普及。STEM 的使用尚不是十分广泛, 这种观察方式目前只在分析型电镜中使用, 所谓分析型电镜即非单一的 TEM, 也非单一的 SEM, 是指综合了各种电镜的性能, 能对多种电子信号进行综合分析处理的电子显微镜。

习题

9.1 下列四种运动 (忽略阻力) 中哪一种 is 简谐振动? ()

- A. 小球在地面上做完全弹性的上下跳动。
- B. 细线悬挂一小球在竖直平面上做大角度的来回摆动。
- C. 浮在水里的一均匀矩形木块, 将它部分按入水中, 然后松开, 使木块上下浮动。
- D. 浮在水里的一均匀球形木块, 将它部分按入水中, 然后松开, 使木块上下浮动。

9.2 一质量为 m 的物体挂在劲度系数为 k 的轻弹簧下面, 其振动周期为 T 。若将此轻弹簧分割成三等份, 将一质量为 $2m$ 的物体挂在分割后的一根弹簧上, 则此弹簧振子的周期应为 ()。

- A. $\frac{3}{\sqrt{6}}T$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}T$ C. $\sqrt{2}T$ D. $\sqrt{6}T$

9.3 一个质点做简谐振动, 已知质点由平衡位置运动到二分之一最大位移处所需的最短时间为 t_0 , 则该质点的振动周期 T 应为 ()。

- A. $4t_0$ B. $12t_0$ C. $6t_0$ D. $8t_0$

9.4 一简谐振动的旋转矢量图如图 9.25 所示, 设图中圆的半径为 R , 则该简谐振动的振动方程为 ()。

- A. $x = R \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ B. $x = R \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$
 C. $x = R \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$ D. $x = R \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$

9.5 某弹簧振子的振动曲线如图 9.26 所示, 则由图可确定 $t = 2\text{ s}$ 时, 振子的速度为 ()。

- A. $3\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ B. $-3\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ C. $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ D. $-3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

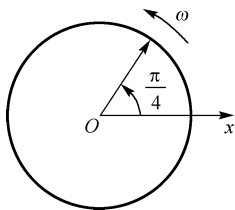


图 9.25 习题 9.4 图

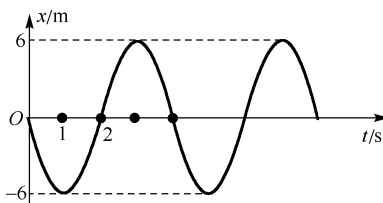


图 9.26 习题 9.5 图

9.6 两同方向同频率的简谐振动的振动方程为 $x_1 = 6 \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ (SI), $x_2 = 2 \cos\left(5t - \frac{\pi}{2}\right)$ (SI), 则它们的合振动的振动方程应为 ()。

- A. $x = 4 \cos 5t$ (SI) B. $x = 8 \cos(5t - \pi)$ (SI)
 C. $x = 4 \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ (SI) D. $x = 4 \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ (SI)

9.7 若简谐振动 $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ 的周期为 T , 则简谐振动 $x' = B \cos(n\omega t + \varphi_0 + \pi)$ 的周期为_____。

9.8 已知简谐振动 $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ 的周期为 T , 在 $t = \frac{T}{2}$ 时的质点速度为_____, 加速度为_____。

9.9 一简谐振动的振动曲线如图 9.27 所示, 则由图可得其振幅为_____, 其初相为_____, 其周期为_____, 其振动方程为_____。

9.10 如图 9.28 所示, 初始时两质量均为 m 的无黏合的物体 A 、 B 向左压缩劲度系数为 k 的弹簧, 然后放手, 则物体 A 第一次到达正的最大位移处所用的时间为_____。若初始时弹簧被压缩 x_0 , 则物体 A 第一次到达正最大位移处时 B 物体的速度为_____。

9.11 已知弹簧振子的弹簧的劲度系数为 k ，其振动的振幅为 A ，则当振子移动到正的二分之一最大位移处时的动能为_____。

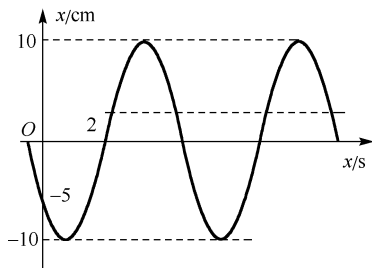


图 9.27 习题 9.9 图

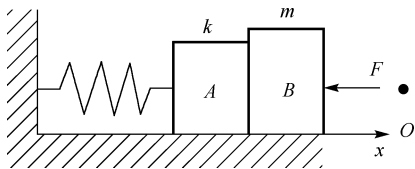


图 9.28 习题 9.10 图

9.12 如图 9.29 所示，一质量为 m 的滑块与劲度系数为 k 的弹簧相连，另一质量为 $M = 3m$ 的滑块用一根轻绳绕过一质量可忽略不计的定滑轮与滑块 m 连接。 $t = 0$ 时弹簧处于原长状态，求滑块 M 的运动方程。（设 M 处于平衡位置时为坐标原点，以向下方向为正方向。）

9.13 如图 9.30 所示，以向右为正方向，用向左的力压缩一弹簧，然后松手任其振动，若从松手时开始计时，则该弹簧振子的初相位为（ ）。

A. 0

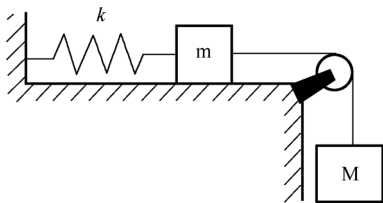
B. $\frac{\pi}{2}$ C. $-\frac{\pi}{2}$ D. π 

图 9.29 习题 9.12

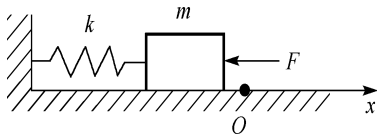


图 9.30 习题 9.13 图

9.14 两相同的轻弹簧各系一物体（质量分别为 m_1 、 m_2 ）做简谐振动（振幅分别为 A_1 、 A_2 ），问下列哪一种情况两振动周期不同？（ ）

A. $m_1 = m_2$, $A_1 = A_2$ ，一个在光滑水平面上振动，另一个在竖直方向上振动。B. $m_1 = 2m_2$, $A_1 = 2A_2$ ，两个都在光滑的平面上做水平振动。C. $m_1 = m_2$, $A_1 = 2A_2$ ，两个都在光滑的平面上做水平振动。D. $m_1 = m_2$, $A_1 = A_2$ ，一个在地球上做竖直振动，另一个在月球上做竖直振动。

9.15 已知月球上的重力加速度是地球的 $\frac{1}{6}$ ，若一个单摆（只考虑小角度摆动）在地球上的振动周期为 T ，将该单摆拿到月球上去，其振动周期应为（ ）。

- A. $6T$ B. $\frac{T}{6}$ C. $\sqrt{6}T$ D. $\frac{T}{\sqrt{6}}$

9.16 已知某简谐振动的振动曲线如图 9.31 所示, 位移的单位为 m, 时间单位为 s, 则此简谐振动的振动方程为 ()。

- A. $x = 10 \cos\left(\frac{11\pi}{24}t + \frac{2}{3}\pi\right)$ (SI) B. $x = 10 \cos\left(\frac{7\pi}{24}t - \frac{7}{6}\pi\right)$ (SI)
C. $x = 10 \cos\left(\frac{7\pi}{24}t - \frac{2}{3}\pi\right)$ (SI) D. $x = 10 \cos\left(\frac{11\pi}{24}t - \frac{2}{3}\pi\right)$ (SI)

9.17 一质量为 m 的物体与一个劲度系数为 k 的轻弹簧组成弹簧振子, 当其振幅为 A 时, 该弹簧振子的总能量为 E 。若将其弹簧分割成两等份, 将两根弹簧并联组成新的弹簧振子, 则新弹簧振子的振幅为多少时, 其总能量与原先弹簧振子的总能量 E 相等? ()

- A. $\frac{A}{2}$ B. $\frac{A}{4}$ C. $\frac{A}{\sqrt{2}}$ D. A

9.18 已知两同方向同频率的简谐振动的振动方程分别为 $x_1 = A_1 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ (SI), $x_2 = A_2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$ (SI), 则它们的合振幅应为 ()。

- A. $|A_1 - A_2|$ B. $A_1 + A_2$ C. $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ D. $\sqrt{|A_1^2 - A_2^2|}$

9.19 一质点做简谐振动如图 9.32 所示, 已知质点在一个周期内相继经过距离为 S 的两点 A 、 B , 历时 T , 且质点在 A 点和 B 点的速度相同; 再经过 T 后, 质点又一次经过 B 点, 则该质点运动的周期为_____, 振幅为_____。

9.20 已知一弹簧振子由 $m = 3 \text{ kg}$ 的物体与劲度系数 $k = 12 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ 的弹簧组成, 其振幅为 $A = 2 \text{ m}$, 沿 x 轴运动, 并从物体处于最大位移处时开始计时, 则其角频率为_____, 初相为_____, 其振动方程为_____, $t = \frac{\pi}{8} \text{ s}$ 时, 作用于该物体的力的大小为_____, 方向为_____。

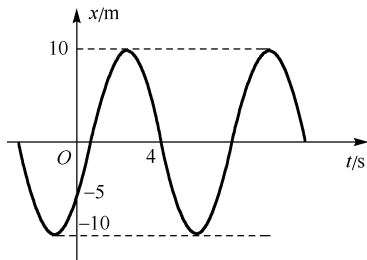


图 9.31 题 9.16 图

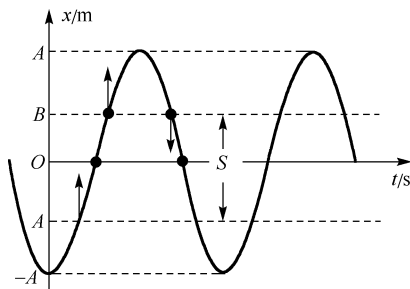


图 9.32 习题 9.19 图

9.21 已知一简谐振动的振动方程为 $x = 2\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$, 请在图 9.33 中分别画出位移、速度、加速度曲线。

9.22 质量为 m 的物体与劲度系数为 k 的弹簧组成弹簧振子的振动动能的变化频率为_____, 其势能的变化频率为_____。

9.23 已知一物体同时参与两个同方向、同频率的简谐振动, 这两个简谐振动的振动曲线如图 9.34 所示, 其中 $A_1 > A_2$, 则该物体振动的初相为_____。

9.24 一个质点做简谐振动, 其运动速度与时间的曲线如图 9.35 所示, 求该质点的振动方程。

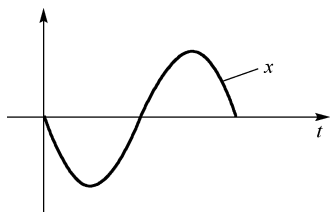


图 9.33 习题 9.21 图

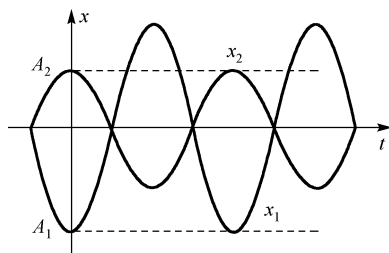


图 9.34 习题 9.23 图

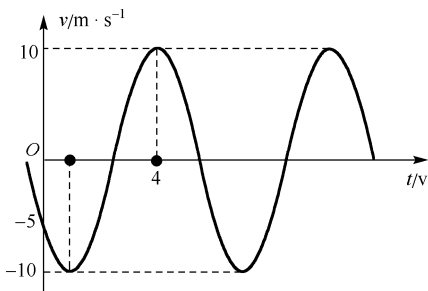


图 9.35 习题 9.24 图

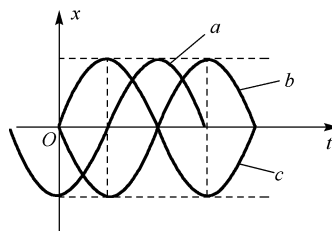


图 9.36 习题 9.25 图

9.25 已知一简谐振动的振动方程为 $x = 2\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$, 图 9.36 中的 a 、 b 、 c 哪一条曲线分别表示位移、速度、加速度?

9.26 平面简谐波沿 x 轴正方向传播, 振幅为 2 cm , 频率为 50 Hz , 波速为 200 m/s 。在 $t=0$ 时, $x=0$ 处的质点正在平衡位置向 y 轴正方向运动, 求 $x=4\text{ m}$ 处介质质点振动的表达式及该点在 $t=2\text{ s}$ 时的振动速度。

9.27 有两个同方向、同频率的简谐振动，其合振动的振幅为 0.2 m ，合振动的相位与第一个振动的相位之差为 $\frac{\pi}{6}$ ，若第 1 个振动的振幅为 0.173 m ，求第 2 个振动的振幅，两个振动的相位差。

9.28 一物体做简谐振动，① 当它的位置在振幅的一半时，试利用旋转矢量计算它的相位可能为哪些值，并做出这些旋转矢量；② 谐振子在这些位置时，其动能、势能各占总能量的百分比是多少？

第10章 波 动

振动系统通常都不是孤立存在的，它们都和周围的其他介质相联系，振动的传播过程称为波动。波动通常分为两大类：一类是机械振动在媒质中的传播，称为机械波；另一类是变化的电场和变化的磁场在空间的传播，称为电磁波。虽然各类波的本质不同，各有其特殊的性质和规律，但在形式上具有许多相同的特征和规律。例如，它们都有波源，机械波的波源是机械振动，而电磁波的波源是电磁振荡；都具有一定的传播速度；都伴随着能量的传播；都能产生反射、折射、干涉和衍射等现象；都可以用类似的数学方法来描述，等等。本章主要介绍机械波的基本规律，其中许多对电磁波也适用。具体包括机械波，特别是最基本的平面简谐波的形成、类型、波函数及其特征；波动的传播速度以及波动传送能量的规律；波动的传播规律——惠更斯原理；波的叠加原理和叠加现象——驻波；波的反射、折射和干涉等；波的多普勒效应。

10.1 机械波的概念

振动的传播过程称为波动。例如，投石下水在水面上激起圆形水波，振动音叉在空气中激起声波。机械振动在媒质中传播，称为**机械波**，如声波、水波、地震波等。变化的电场和变化的磁场在空间传播，称为**电磁波**，如无线电波、光波、X射线等。本章主要讨论机械波。

10.1.1 机械波的产生

传播机械振动的媒介物叫**媒质**（也称为**弹性媒质**），如空气、水、固体物质等，媒质是由大量质元（后都称为质点）构成的，各质元间存在相互作用的弹性力，在**弹性媒质**中，各质点之间以弹性力相互联系着。当媒质中的一个质点受到某种扰动开始振动后，在弹性力的作用下，就会带动邻近质点振动，邻近质点又带动更远质点振动。这样依次带动，就把振动由近及远地传播出去，形成了**波动**。

如果没有传播振动的弹性媒质，机械波将不能传播。例如，用无弹性的隔音材料将闹钟包裹起来，滴答声很难听见，将闹钟置于玻璃罩内，缓缓抽出空气，滴答声会逐渐减弱至消失。这说明机械波的产生必须具备两个条件：一是要有作机械振动的物体，称为**波源**；二是要有传播振动的**弹性媒质**。

10.1.2 横波和纵波

按照波速和质点振动速度的方向之间的关系,可以把波分为横波和纵波。在波动中,如果质点振动的方向和波的传播方向相互垂直,这种波称为**横波**。横波是通过介质的切向形变所产生的切向弹性力来实现的,只有固体才能产生切向形变,因而横波只能在固体中传播。

如果在波动中,质点的振动方向和波的传播方向相互平行,这种波称为**纵波**。纵波是通过介质的拉伸和压缩形变所形成的纵向弹性力来实现的。固体、液体、气体都能产生这种形变,因而都能传播纵波。如图 10.1 所示,将一根弹簧水平放置,扰动弹簧的左端使其沿水平方向左右振动,就可以看到这种振动状态沿着弹簧向右传播。纵波的图像是疏密相间的图形。在空气中传播的声波也是纵波。

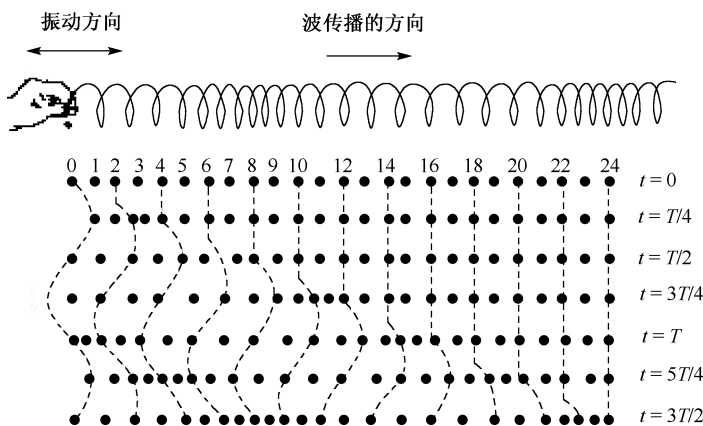


图 10.1 弹簧中的纵波

10.1.3 机械波的描述

当波源在介质中振动时,振动将向各个方向传播,形成波动。为了形象地描述波在介质中的传播,常用几何图形描述各质元的相位关系及传播方向。用带箭头的直线表示波的传播方向,这样的线叫**波线**;介质中各质点都在平衡位置附近振动,在同一时刻,把不同波线上相位相同的点所连成的曲面称为**波面**或**同相面**;在某一时刻,由波源最初振动状态传到的各点所连成的曲面称为**波前**或**波阵面**。波前是波面的特例,是传到最前面的那个波面,它反映了波的传播面貌。波前的形状是平面的波,叫做**平面波**;波前的形状是球面的波,叫做**球面波**,如图 10.2(a)、图 10.2(b)所示。在实际中还有柱面波的情况。在各种均匀同性介质中,波线与波面垂直,且指向振动相位降落的方向,平面波的波面是一系列平行的平面。球面波的波面是一系列的同心球面,因此,球面波的波线是以波源为中心沿半径

方向的辐射状射线族。注意，波动光学强调的是波面上各点等相位的特点，这与几何光学强调的波线传播方向的特点有所不同。

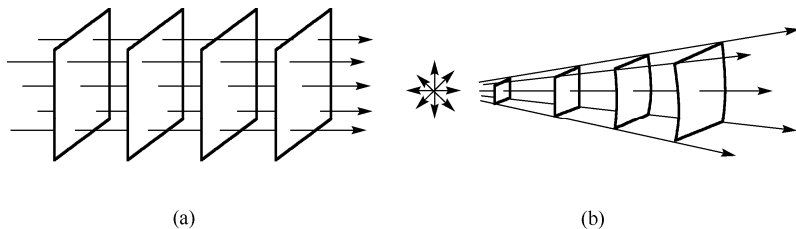


图 10.2 (a)平面波的波线和波面；(b)球面波的波面和波线

10.1.4 波长、波的周期、频率和波速的关系

波长、波的周期、波的频率和波速是描述波动的重要物理量。

波长是描述波动空间周期性的物理量，沿波的传播方向两个相邻的、位相差为 2π 的两振动质点之间的距离称为**波长**，用 λ 表示。在横波情形下，波长 λ 也可用相邻波峰或相邻波谷之间的距离表示；在纵波情形下，波长 λ 用相邻的密集部分中心或相邻的稀疏部分中心之间的距离表示。

波动的**周期**是指一个完整波形通过媒质中某一固定点所需的时间，或波传过一个波长所用的时间，用 T 表示。周期的倒数称为**频率**，波动的频率是指单位时间内通过媒质中某固定点完整波的数目，用 ν 表示。由于波源每完成一次全振动，就有一个完整的波形发送出去，所以，当波源相对于媒质静止时，波动的周期即为波源振动的周期，波动的频率为波源振动的频率。因此波动的周期和频率由波源决定。

波动是振动状态（位相）的传播，振动状态在单位时间内传播的距离称为**波速**，也称**相速**，用 u 表示。对于机械波，波速通常由媒质的性质决定。

对弹性波而言，波的传播速度取决于介质的惯性和弹性，具体地说，就是取决于介质的质量密度和弹性模量，而与波源无关。

横波在固体中传播速度为

$$u = \sqrt{\frac{N}{\rho}} \quad (10-1)$$

式中， N 是固体切变弹性模量， ρ 是介质质量密度。

在液体和气体中，由于不可能发生切向形变，所以不能传播横波。但它们具有体变弹性，所以能传播纵波。液体和气体中的纵波速度为

$$u = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (10-2)$$

式中, B 是介质的体积弹性模量, ρ 是介质质量密度。对于大多数金属, $B \approx Y$ (杨氏弹性模量), 故

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (10-3)$$

在弹性细棒或金属(弹性限度内)中, 纵波波速为

$$u_l = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (10-4)$$

式中, Y 为杨氏弹性模量, ρ 是介质质量密度。

在拉紧的绳或细线中, 横波的波速为

$$u_t = \sqrt{\frac{T}{\eta}} \quad (10-5)$$

式中, T 为张力, η 为绳的质量线密度。

波长、波速与波动的周期、频率的关系为

$$\lambda = uT = \frac{u}{\nu} \quad (10-6)$$

在 1 s 内通过波线上一点的完整波的数目乘以每个完整波的长度, 就等于波向前推进的速度, 也就是波的传播速度, 如图 10.3 所示。数学形式为

$$u = \nu\lambda \quad (10-7)$$

这是波速、波长和频率之间的基本关系式。它的物理意义是: 由于振动状态由相位确定, 所以波速 u 就是波的相位的传播速度, 又称为相速。

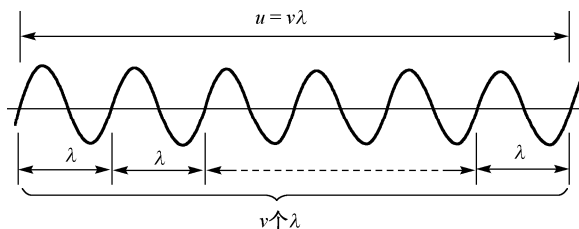


图 10.3 波长、频率和波速的关系

10.2 平面简谐波

10.2.1 平面简谐波及波函数

振动在媒质中的传播形成波。在无吸收的均匀无限大媒质中, 如果传播的是简谐振动, 且波传播到各质点的振动频率和振幅相同, 只是各质点振动相位沿传播方向依次落后, 这

样的波称为**简谐波**。如果简谐波的波面为平面，则称为**平面简谐波**。平面简谐波是一种最简单、最基本的波，研究平面简谐波的运动规律是研究复杂波动的基础。

在波动中，每一个质点都在进行振动，对一个波的完整描述，应该是给出波动中任一质点的振动方程，这种方程称为**波动方程**（或**波函数**）。我们知道，简谐波（余弦波或正弦波）是最基本的波，特别是平面简谐波，它的规律更为简单。下面先讨论平面简谐波在理想的无吸收的均匀无限大介质中传播时的波动方程。

在平面简谐波的传播中，任意时刻各点的振动相位和位移一般都不相同。根据波阵面的定义，在任一时刻处在同一波阵面上的各点有相同的相位、相同的位移。因此，只要知道了任意一条波线上波的传播规律，就可以知道整个平面波的传播规律。

下面来分析某一条波线各质点的振动相位。如图 10.4 所示，用 x 表示波动中各质点的平衡位置，用 y 表示它们振动的位移。于是，图中原点 O 点的振动方程为

$$y_0 = A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (10-8)$$

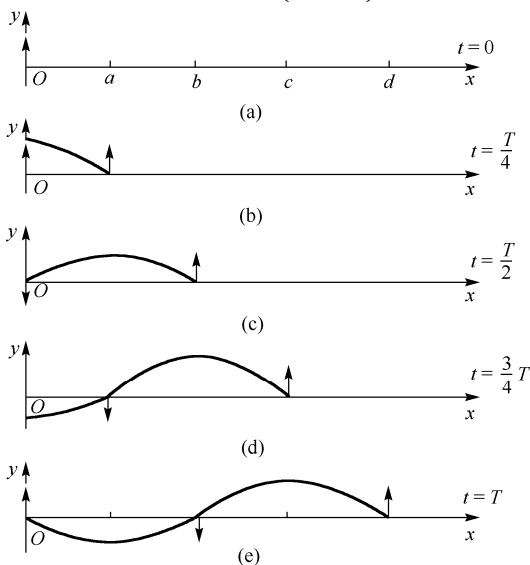


图 10.4 机械波的形成与传播

在 $t=0$ 时（见图 10.4(a)），原点 O 的相位是 $-\frac{\pi}{2}$ ，它的位置在平衡位置，且向 y 轴正方向运动。当 $t=\frac{T}{4}$ 时， O 点的相位变为 0 ，它的位移为正最大。此时 O 点的下一个考察点 a 点的位置在平衡位置，且向 y 轴正方向运动，相位为 $-\frac{\pi}{2}$ ，这正是 $t=0$ 时 O 点的相位。当 $t=\frac{T}{2}$ 时， O 点的相位为 $\frac{\pi}{2}$ ，它的位置在平衡位置，且向 y 轴负方向运动。此时 a 点的相位

为 0, 下一个考察点 b 点的相位为 $-\frac{\pi}{2}$, 当 $t=T$ 时, 从 O 点开始, 沿传播的方向看过去, a 、 b 、 c 、 d 各点的相位依次为 $\frac{3\pi}{2}$ 、 π 、 $\frac{\pi}{2}$ 、 0 、 $-\frac{\pi}{2}$, 是由近及远依次落后的。

波的传播实质上是相位的传播, 相位传播实质上是描述波动中各质点之间相位的关系, 它是波动中最基本的概念之一。

下面通过对相位的分析给出平面简谐波的波动方程。如图 10.5 所示, 设有一列平面简谐波沿 x 轴的正方向传播, 波速为 u 。取任意一条波线为 x 轴, 设 O 点为 x 轴的原点。假定 O 点处 ($x=0$ 处) 质点的振动方程为 $y_0 = A\cos(\omega t + \varphi)$, 式中, A 为振幅, ω 为角频率, φ 称为初相。 x 处质点的振动相位比原点 ($x=0$ 处) 落后, 振动从原点传到 x 处的时间为 $\frac{x}{u}$, 落后的相位为 $\omega \frac{x}{u}$ 。

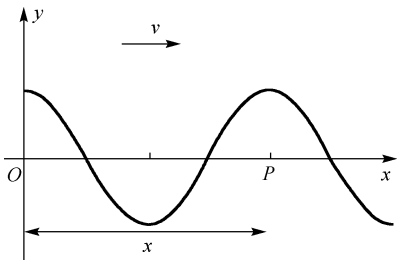


图 10.5 平面简谐波的波形

$$y = A\cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{u}\right) + \varphi\right] \quad (10-9)$$

式 (10-9) 表示的是波线上任一点 (距离原点为 x) 处的质点任一瞬时的位移, 这就是平面简谐波的波动方程。式中负号对应于正行波 (波沿着 x 轴正向传播), 正号对应于反行波 (波沿着 x 轴负向传播)。

10.2.2 波函数的意义

为了弄清楚波动方程的物理意义, 下面做进一步分析。波动方程含有 x 和 t 两个自变量, 分别给定 x 和 t , 考察波动方程的含义。

(1) 当 x 一定时, 那么位移 y 就只是 t 的周期函数, 此时该方程表示 x 处质点在各个不同时刻的位移, 即波动方程表示在波线的 x 处, 质点简谐振动的振动方程。

如果令 $x = x_1$, 而使 t 变化, $\omega = 2\pi\nu$, $u = \lambda\nu$, 则 $y = A\cos\left[\left(\omega t - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right) + \varphi\right]$ 表示 x_1 处的质点做简谐振动, 初相为 $\varphi - \frac{2\pi x_1}{\lambda}$ 。

(2) 当 t 一定时, 那么位移 y 只是 x 的周期函数, 这时方程给出的是 t 时刻波线上各个不同质点的位移。波动中某一时刻不同质点的位移曲线称为该时刻的波形曲线, 因而当 t 给定时, 方程就是该时刻的波形方程。如果令 $t = t_1$, 而使 x 变化, 则 $y = A\cos\left[\left(\omega t_1 - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$ 表示 t_1 时刻整个介质中各质点振动的位移情况, 给出了该时刻的波形图。

(3) 当 x 、 t 都变化时, 此时波动方程具有其最完整的含义, 表示波动中任一质点的振动规律。波动中任一质点的相位随时间变化, 波动方程表示沿 x 轴方向传播的波动情况, 即代表一列行波。不同时刻的波形曲线记录的是不同时刻各质点的位移图形。而波动的图形是动态的, 表现为波形沿着波线以波速 u 向前推进, 每一个周期 T 移动一个波长 λ , 波形曲线的平移就表示波的传播。

要注意波动方程、振动方程和波形方程在形式上的明显区别, 以免引起概念上的混淆。波动方程描述波动中任一质点的振动规律, 它有两个自变量 x 和 t , 其函数形式表现为 $y = y(x, t)$; 振动方程描述某一点的运动, 只有一个自变量 t , 函数形式表现为 $y = y(t)$; 波形方程表示的是某一时刻各质点的位移, 只有一个自变量 x , 表现为 $y = y(x)$ 。反映在曲线表示上, 要注意振动曲线和波形曲线的区别。振动曲线是 $y-t$ 曲线, 而波形曲线是 $y-x$ 曲线。振动曲线的(时间)周期是 T , 波形曲线的(空间)周期是波长 λ 。在振动曲线中质点的相位随时间逐步增加, 而在波形曲线中质点的相位是沿波的传播方向逐点落后。

例 10-1 已知平面简谐波的波动方程为 $y = 0.02 \cos \pi(200t - 5x)$ (SI)。求: ① 振幅 A 、波长 λ 、频率 ν 、周期 T 和波速 u ; ② 画出 $t = 0.00250$ / $t = 0.005$ s 时的波形图。

分析: 可以根据波动方程的物理意义, 与波动方程的标准形式对比, 求振幅 A 、波长 λ 、频率 ν 、周期 T 和波速 u 等物理量。

解 ① 由波动方程式 (10-9), 有

$$y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) = A \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

此题波动方程可化为

$$y = 0.02 \cos 200\pi \left(t - \frac{x}{40} \right) = 0.02 \cos 2\pi \left(100t - \frac{x}{0.4} \right) = 0.02 \cos 2\pi \left(\frac{t}{0.01} - \frac{x}{0.4} \right)$$

比较以上两式可得: $A = 0.02$ m, $u = 40$ m/s, $\nu = 100$ Hz, $\lambda = 0.4$ m, $T = 0.01$ s。

② 一种方法是根据波形方程来作图(描点法), 这样做比较麻烦。另外, 也可用如下方法求: 画出 $t = 0$ 时波形图, 根据波传播的距离再得出相应时刻的波形图(波形平移)。平移距离

$$\Delta x_1 = u \Delta t_1 = 40 \times 0.0025 = 0.1 = \frac{1}{4} \lambda, \quad \Delta x_2 = u \Delta t_2 = 40 \times 0.005 = 0.2 = \frac{1}{2} \lambda$$

$t = 0$, $t = 0.0025$, $t = 0.005$ s 时的波形如图 10.6 所示。

例 10-2 有平面简谐波沿 x 轴正方向传播, 波长为 λ , 如图 10.7 所示。如果 x 轴上坐标为 x_0 处的质点的振动方程为 $y_{x_0} = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, 试求: ① 波动方程; ② 坐标原点处质点的振动方程; ③ 原点处质点的速度和加速度。

解 ① 如图 10.7 所示, 设考察点为 x 轴上任意一点, 坐标为 x 。从 x_0 到 x 的波程为 $x - x_0$, 按相位落后的关系, x 处质点的振动相位比 x_0 质点落后 $2\pi \frac{x - x_0}{\lambda}$, 故 x 轴上任意一

点的振动方程, 即波动方程为

$$y = A \cos \left(\omega t - 2\pi \frac{x - x_0}{\lambda} + \varphi_0 \right)$$

② 把 $x=0$ 带入上式, 即得原点处质点的振动方程为

$$y = A \cos \left(\omega t + 2\pi \frac{x_0}{\lambda} + \varphi_0 \right)$$

③ 原点处质点的速度为

$$v_0 = \frac{\partial y_0}{\partial t} = -\omega A \sin \left(\omega t + 2\pi \frac{x_0}{\lambda} + \varphi_0 \right)$$

加速度为

$$a_0 = \frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos \left(\omega t + 2\pi \frac{x_0}{\lambda} + \varphi_0 \right)$$

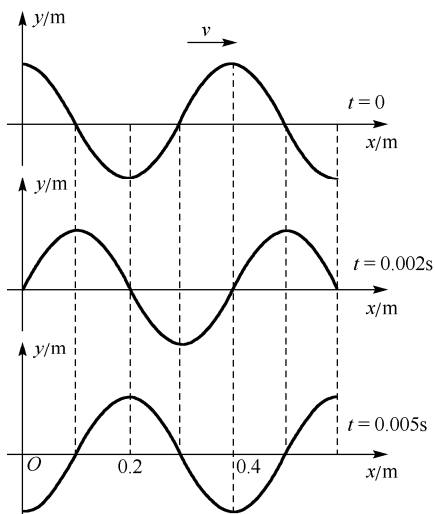


图 10.6 例 10-1 图

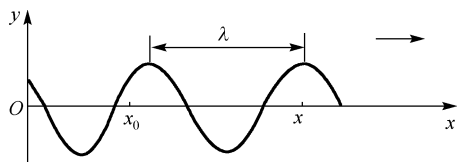


图 10.7 例 10-2 图

例 10-3 一简谐波逆着 x 轴传播, 波速 $u = 8.0 \text{ m/s}$ 。设 $t = 0$ 时的波形曲线如图 10.8 所示。求: ① 原点处质点的振动方程; ② 简谐波的波动方程; ③ $t = \frac{3}{4}T$ 时的波形曲线。

解 ① 由波形曲线图可以看出, 波的振幅 $A = 0.02 \text{ m}$, 波长 $\lambda = 2.0 \text{ m}$, 故波的频率为 $\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{8.0}{2.0} = 4.0 \text{ Hz}$, 角频率为 $\omega = 2\pi\nu = 8\pi \text{ rad/s}$ 。从图中还可以看出, $t = 0$ 时原点处质点的位移为 0, 速度为正值, 可知原点振动的初相为 $-\frac{\pi}{2}$, 故原点的振动方程为

$$y_0 = 0.02 \cos\left(8\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

② 设 x 轴上任意一点的坐标为 x ，从该点到原点的波程为 x ，按相位落后与距离的关系， x 处质点振动的时间比原点处质点超前 $\frac{x}{u} = \frac{x}{8.0}$ ，故 x 轴上任意一点的振动方程，即波动方程为

$$y = 0.02 \cos\left[8\pi\left(t + \frac{x}{8}\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

③ 经过 $\frac{3T}{4}$ 后的波形曲线应比图中的波形曲线向左平移 $\frac{3\lambda}{4}$ ，也相当于向右平移 $\frac{\lambda}{4}$ ，如图 10.8 中虚线所示。

10.3 波的能量 波的强度

10.3.1 波的能量和能流密度

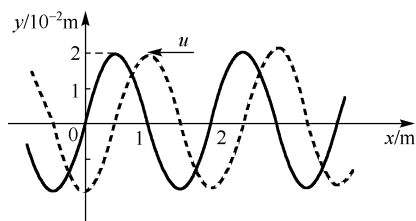


图 10.8 例 10-3 图

1. 波的能量

在波动过程中，介质内各点因振动而具有动能；介质内各点的振动使介质发生形变，因此介质还具有形变势能。把波动过程中介质各部分所具有的动能和势能的总和称为波的能量。

下面以简谐纵波在均匀细杆中沿棒长方向传播为例，推导出波的能量公式。如图 10.9 所示，取 x 轴沿棒长方向，设波动方程为

$$y = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

在波动过程中，棒中每一小段将不断地压缩和拉伸。

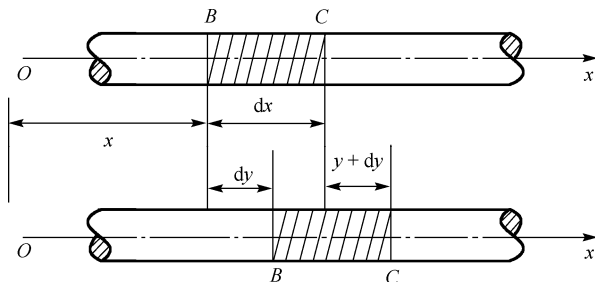


图 10.9 波的能量计算

在棒上任取一体积元 BC ，体积为 dV ，长为 dx 。设棒的横截面积为 S ，质量密度为 ρ ，体积元能量为

$$dE = dE_k + dE_p$$

可以证明体积元的动能和势能相等，即

$$dE_k = dE_p = \frac{1}{2} \rho dV \omega^2 A^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

体积元的总机械能为

$$dE = dE_k + dE_p = \rho dV \omega^2 A^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (10-10)$$

即

$$dE = \rho dV \omega^2 A^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (10-11)$$

讨论：(1) 任一时刻体积元动能与其势能总是相等，为

$$dE_k = dE_p = \frac{1}{2} \rho dV \omega^2 A^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

(2) 波动中体积元的能量与单一谐振动系统的能量有着显著的不同。在单一谐振动的系统中，动能和势能相互转化，动能最大时，势能最小，势能最大时，动能最小，系统机械能守恒。在波动情况下，任一时刻任一体积元的动能与势能总是随时间变化的，两者变化是同步的，值也相等，这说明体积元的总机械能不为常数，而是随时间 t 做周期性变化，即每个体积元机械能不守恒。

(3) 波动中体积元能量不守恒的原因是，每个体积元都不是独立地做谐振动，它与相邻的体积元间有着相互作用，因而相邻体积元间有能量传递。沿着波传播方向，某体积元从前面介质的体积元获得能量，又把能量传递给后面介质，它不断地接收和放出能量。因此，波动传播时，能量由近及远地向外传播出来，这就是波动的重要特征。

*波的能量公式推导

在棒上任取一体积元 BC ，体积为 dV ，棒在平衡位置时， B 、 C 坐标分别为 x 、 $x + dx$ ，即 BC 长为 dx 。设棒的横截面积为 S ，质量密度为 ρ ，体积元能量为

$$dE = dE_k + dE_p$$

动能为

$$dE_k = \frac{1}{2} dm V^2 = \frac{1}{2} \rho dV \cdot \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho dV \cdot \omega^2 A^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (10-12)$$

求势能 dE_p 。设 t 时刻, A 、 B 端位移分别为 y 、 $y + dy$, 因此, 体积元伸长量为 dy 。设在体积元端面上由于形变产生的弹性恢复力大小为 f , 可知, 协强为 $\frac{f}{S}$, 协变为 $\frac{dy}{dx}$, 由杨氏弹性模量定义有

$$\frac{f}{S} = Y \frac{dy}{dx} \quad (Y \text{ 为杨氏弹性模量}) \quad (10-13)$$

则

$$f = SY \frac{dy}{dx} \quad (10-14)$$

由胡克定律, 在弹性限度内弹性恢复力 $f = kdy$, 代入以上两式得

$$k = \frac{YS}{dx} \quad (10-15)$$

于是势能为

$$dE_p = \frac{1}{2} k (dy)^2 = \frac{1}{2} \cdot YS / dx \cdot (dy)^2 = \frac{1}{2} YS dx \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{1}{2} Y dV \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

又由波速 $u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$, 有 $Y = \rho u^2$ 。因为 $y = y(x, t)$, y 是 x 和 t 的函数, 则 $\frac{dy}{dx}$ 应写成 $\frac{\partial y}{\partial x}$, 而 $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\omega}{\mu} A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$, 所以体积元的势能为

$$dE_p = \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot dV \frac{\omega^2}{V^2} A^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] = \frac{1}{2} \rho dV \omega^2 A^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (10-16)$$

故体积元的总机械能为

$$dE = dE_k + dE_p = \rho dV \omega^2 A^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (10-17)$$

即

$$dE = \rho dV \omega^2 A^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (10-18)$$

2. 波的能量密度和平均能量密度

单位体积媒质所具有的能量为波的能量密度, 用 w 表示, 波的能量密度为

$$w = \frac{dE}{dV} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (10-19)$$

波的能量密度是随时间而变化的, 能量密度在一个周期内的平均值称为波的平均能量密度, 用 \bar{w} 表示, 有

$$\bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T w dt = \frac{1}{T} \int_0^T \rho \omega^2 A^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] dt = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \quad (10-20)$$

式(10-20)表明, 机械波的能量密度与振幅平方、频率的平方和介质的密度都成正比。这一公式虽然是从平面简谐波的纵波的特殊情况导出的, 但是可以证明, 该结论对于所有的简谐波都适用。

10.3.2 波的强度

1. 波的平均能流

波的传播过程必然伴随着能量的流动, 需要研究能量传播的多少和快慢。为了表述波动能量的这一特性, 引入能流的概念。单位时间内垂直通过某一面积的能量, 称为通过该面积的能流, 用 P 表示。因为波动中任一体积元的总机械能随时间 S_1 做周期性变化, 所以通过某一面积的能量也随时间做周期性变化。一个周期 ($t + \tau$) 内通过与波的传播方向垂直的某个面 ΔS 的能量, 叫做通过 ΔS 的平均能流, 数学表达式为

$$\bar{P} = \bar{w} u \Delta S \quad (10-21)$$

式中, \bar{w} 为平均能量密度。

2. 波的平均能流密度(波的强度)

为了研究波动能量传播的集中程度, 引入波的平均能流密度。单位时间通过与波的传播方向垂直的单位面积的平均能量为平均能流密度, 也称为波的强度, 用 I 表示, 即

$$I = \bar{w} u = \frac{1}{2} \rho u A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} Z A^2 \omega^2 \quad (10-22)$$

其中, $Z = \rho u$ 是实际应用中经常遇到的一个表征介质特性的常量, 称为介质的特性阻抗。式(10-22)表明, 弹性介质中简谐波的强度与介质的特性阻抗成正比, 还正比于振幅的平方, 正比于频率的平方。在国际单位制中, 波的强度单位为 $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ 。

3. 波的振幅变化

(1) 平面简谐波振幅不变

在推导平面波(简谐波)的波动方程时, 假定介质中各点振幅不变。现从能量角度来理解振幅不变的含义。设垂直于波传播方向上有两平面 S_1 、 S_2 (面积 $S_1 = S_2$), 如图 10.10 所示, 此两平面构成了一柱体的两底面。设 \bar{P}_1 、 \bar{P}_2 为通过 S_1 、 S_2 的平均能流, 即

$$\bar{P}_1 = \bar{W}_1 u S_1 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A_1^2 u S_1$$

$$\bar{P}_2 = \bar{W}_2 u S_2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A_2^2 u S_2$$

若 $A_1 = A_2$ ，则

$$\bar{P}_1 = \bar{P}_2 \quad (S_1 = S_2) \quad (10-23)$$

也就是说，如果振幅不变，则通过 S_1 、 S_2 的平均能流相等，即有多少能量通过 S_1 进入柱体内，就有多少能量通过 S_2 流出此柱体。这说明了介质不吸收能量。因此，介质中各点振幅相同表明了介质不吸收能量。

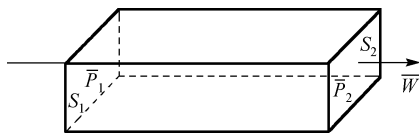


图 10.10 平面波的能量

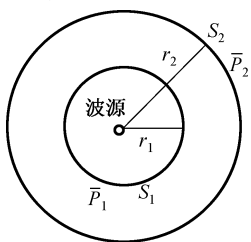


图 10.11 球面波的能量

(2) 球面波振幅的变化关系

在球面波情况下，假设介质不吸收能量，则振幅是否不变呢？

设在距波源 O 为 r_1 、 r_2 处取两球面，面积分别为 S_1 、 S_2 ，如图 10.11 所示，通过 S_1 、 S_2 的平均能流为

$$\bar{P}_1 = \bar{W}_1 u S_1 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A_1^2 u S_1$$

$$\bar{P}_2 = \bar{W}_2 u S_2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A_2^2 u S_2$$

因介质不吸收能量，故 $\bar{P}_1 = \bar{P}_2$ ，即 $A_1^2 S_1 = A_2^2 S_2$ ，则

$$\frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} = \frac{r_2}{r_1} \quad (10-24)$$

由此可知， $A \propto \frac{1}{r}$ ，所以球面简谐波的波函数为

$$y = \frac{A}{r} \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \quad (10-25)$$

式中， r 为球面到波源的距离， A 为球面到波源为单位距离时的振幅。

例 10-4 一正弦波在空气中沿直径为 0.14 m 的圆柱形管行进，波的强度为 $9 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ ，频率为 300 Hz，波速为 $300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。求：① 波的平均能量密度和最大能量密度；② 两相邻的同相面间的波中平均含有的能量。

解 ① 由题意知，垂直于波传播方向的面积为

$$S = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = 3.14 \times \left(\frac{0.14}{2} \right)^2 = 1.54 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

根据平均能量密度与波强、波速的关系得

$$\bar{w} = \frac{I}{u} = \frac{9 \times 10^{-3}}{300} = 3 \times 10^{-5} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

最大能量密度为

$$w = \rho A^2 \omega^2 = 2\bar{w} = 6 \times 10^{-5} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

② 两相邻同相面间的波带中包含的能量就是一个波长的距离所包含的能量, 而

$$\omega = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) = \omega_m \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

故

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_\lambda &= \int_0^\lambda \omega S dx = \int_0^\lambda S \omega_m \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) dx = \frac{1}{2} \omega_m S \lambda = \frac{1}{2} \omega_m S \frac{u}{v} \\ &= \frac{6 \times 10^{-5}}{2} \times 0.0154 \times \frac{300}{300} = 4.62 \times 10^{-7} \text{ J} \end{aligned}$$

10.3.3 波的吸收

实际上, 波在介质中传播时, 介质总要吸收波的一部分能量, 因此即使在平面波的情况下, 波的振幅, 以及波的强度也要沿波的传播方向逐渐减小, 所吸收的能量通常转换成介质的内能或热。这种现象称为波的吸收。波的吸收机理十分复杂。有吸收时, 平面波的振幅衰减可用以下方法确定。

实验表明, 当波通过厚度为 dx 的一薄层介质时, 若波的强度增量为 dI ($dI < 0$), dI 正比于入射波的强度 I , 也正比于介质层的厚度 dx , 则 $dI = -\alpha I dx$, α 为比例系数, 对同种介质, α 为常量, 则积分后得

$$I = I_0 e^{-\alpha x} \quad (10-26)$$

式中, I_0 和 I 分别为 $x = x_0$ 和 $x = x$ 处波的强度。 α 为一个与介质的性质、温度及波的频率有关的量, 称为介质的吸收系数。式 (10-26) 表明波在介质中传播时, 波的强度是按指数规律衰减的。

10.3.4 声波

1. 声波 次声波 超声波

声波是机械波的一种, 在弹性介质(固体、液体、气体)中, 频率在 $20 \sim 20000 \text{ Hz}$ 范围内的机械振动称为**声振动**。由声振动激起的波动称为**声波**。在空气与水中传播的声波是纵波, 在固体中传播的声波既可以是纵波, 也可以是横波。

人耳能听到的声波的频率在 $20 \sim 20000 \text{ Hz}$ 之间, 这一频率范围的声波能被人耳听到, 称为可闻声波。频率低于 20 Hz 的声波称为**次声波**, 次声波一般不能被人耳听到。这种波

的特性是频率低 ($<20\text{ Hz}$)，波长长，大气吸收少，可以远距离传输，容易发生衍射，但定向发射能力弱。

频率高于 20000 Hz 的声波称为超声波，超声波不能被人耳听到，其特性是频率高，波长短，故超声波具有如下一般声波所没有的特性。

(1) 能流密度大。由于能流密度与频率的平方成正比，故超声波的能流密度比一般声波大得多。

(2) 方向性好。由于超声波的波长短，衍射效应不显著，所以可以近似地认为超声波沿直线传播，即传播的方向性好，容易得到定向而集中的超声波束，能够产生反射、折射，也可以被聚焦。超声波的这一特性，称为**束射特性**。

(3) 穿透力强。超声波的穿透本领大，特别是在液体和固体中传播时，衰减很小，所以超声波主要用在固体和液体中。与电磁波相反，超声波在空气中衰减较快。

2. 声波的速度

机械波在不同介质中传播的速度是不同的，例如，固体中纵波的波速为

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (10-27)$$

其中， Y 为固体的弹性模量（杨氏模量）， ρ 为固体的密度。

流体中纵波的波速为

$$u = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \quad (10-28)$$

由理想气体状态方程 $\rho = \frac{M}{\rho} = \frac{M_{\text{mol}} p}{RT}$ 得到声波在气体中传播的速度为

$$u = \sqrt{\frac{k}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{\text{mol}}}} \quad (10-29)$$

其中， $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ 是气体的定压摩尔热容与定容摩尔热容之比， ρ 、 p 为气体的密度和压强。

例如，在 1 atm 和 0°C 时，空气中声速为

$$u = \sqrt{1.4 \times 1.013 \times 10^5 / 1.293} = 331\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

声波的传播速度几乎与频率无关，但是由于速度与介质的密度有关，所以声波的传播速度对于温度和压强的变化很敏感。

在同一温度下，声波在液体与固体中的速度大于在空气中的速度。

3. 声强

声波的能流密度叫做声强。由平均能流密度公式得到

$$I = \frac{1}{2} \rho u A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} Z A^2 \omega^2 \quad (10-30)$$

在国际单位制(SI)中, 声强的单位为瓦每平方米($\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$)。式(10-30)表明, 在相同介质中, 影响声强 I 的因素是角频率 ω 和振幅 A 。例如, 对于超声波, 由于 ω 大, 故声强 I 大; 对于炮声, 由于 A 大, 故声强 I 也大。频率越高时, 越容易获得较大的声压和声强。另外, 超声波易于聚焦, 可以在焦点处获得极大的声强。例如, 大炮的声强约为 $1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, 而目前用聚焦的方法, 超声波的最大声强已达 $10^9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, 比炮的声强度高 10^9 倍。

引起听觉的声波频率为 $20 \sim 20000 \text{ Hz}$, 但并不是说在这个频率范围内的所有声波都可以被听到, 准确地讲, 只有满足声强的上、下限的声波才能被听到。低于下限的声强不能引起听觉, 能引起听觉的最低声强称为**听觉阈**; 高于上限的声强不能引起听觉, 而只能引起痛觉, 这一声强的上限值称为**痛觉阈**。

4. 声强级

引起人们听觉的声强变化范围很大, 为 $10^{-12} \sim 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, 数量级相差很大。由此, 为了比较介质中各点声波的强度, 通常不使用声强, 而是使用声强级。规定声强级的基准值为 $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, 即 1000 Hz 的声波能引起听觉的最弱声强。把声强 I 与基准声强之比的对数称为声强级, 表达式为

$$I = \lg \frac{I}{I_0} \quad (10-31)$$

单位为贝耳(bel)。实际上, 贝尔这一单位太大, 通常采用分贝(dB), 此时声强级公式定义为

$$I_L = 10 \lg \frac{I}{I_0} \quad (10-32)$$

例 10-5 用聚焦超声波的方法, 可以在液体中产生强度达 $120 \text{ kW} \cdot \text{cm}^{-2}$ 的超声波。设波源做简谐振动, 频率为 500 kHz , 水的密度为 $10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 声速为 $1500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 求此时液体质点的位移振幅、速度振幅和加速度振幅。

解 因波的强度 $I = \frac{1}{2} \rho u A^2 \omega^2$, 所以

位移振幅为

$$A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2I}{\rho u}} = \frac{1}{2\pi \times 5 \times 10^5} \sqrt{\frac{2 \times 120 \times 10^7}{1 \times 10^3 \times 1.5 \times 10^3}} = 1.27 \times 10^{-5} \text{ m}$$

速度振幅为

$$v_m = \omega A = 2\pi \times 500 \times 10^3 \times 1.27 \times 10^{-5} = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

加速度振幅为

$$a_m = \omega^2 A = (2\pi \times 500 \times 10^3)^2 \times 1.27 \times 10^{-5} = 1.25 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

可见液体中声振动的振幅是极小的，但高频超声波的加速度振幅却可以很大。上述结果中的加速度振幅约为重力加速度的 1.28×10^7 倍，这意味着介质的质元受到的作用力要比重力大 7 个数量级。可见超声波的机械作用是很强的，其在机械加工、粉碎技术、清除污垢等方面有广阔的应用前景。

10.4 波的干涉

10.4.1 波的叠加原理

若有几列波同时在介质中传播，当这几列波在空间某点相遇时，它们将保持各自原有的特性（频率、波长、振动方向）独立传播，这称为波传播的独立性。把两个小石块投掷于很大的静止水面上的邻近二点，可见从石头落点发出二圆形波互相穿过，在它们分开之后仍然是以石块落点为中心的二圆形波。说明了它们各自独立传播。在说话时我们能同时听到几个人的声音，在音乐会上我们能同时听到多种乐器的演奏，各个乐器都产生声波，在空气中同时传播着许多声波，但是各种乐器的声波各自独立地传播，各声波的波长、频率和传播方向不变。大量的观察和研究表明，几列波可以保持各自的特点（频率、波长、振幅、振动方向等）同时通过同一媒质，好像在各自的传播过程中没有遇到其他波一样。几列波相遇时保持各自的特点通过媒质中波的叠加区域。在相遇区域内，任一点处质点的振动都是各个波单独引起的振动的合成。即在任一时刻，该点处质点的振动位移是各列波在该点引起的矢量和。这一规律称为**波的叠加原理**。

应注意，波的叠加原理仅在波的强度不太大时才成立，当波的强度很大时，波动方程将为非线性的，叠加原理就不再成立。

10.4.2 波的干涉

一般来说，频率不同，振动方向不同的几列波在相遇各点的合振动（叠加）是很复杂的，迭加图样不稳定。下面只讨论一种最简单而又最重要的两列频率相同，振动方向相同，相位相同或相位差恒定的简谐波的叠加。

波的干涉可用水波来演示。在水槽中放一隔板，隔板中部有两个相距较近的狭缝，在隔板一侧两狭缝的中垂线上用一频率固定的振子上、下敲击水面，在隔板的另一侧便可看到强弱分布稳定的相干波形，图 10.12(a)所示为在水面上产生的干涉现象。图 10.12(b)所示

为干涉的示意图, S_1 和 S_2 是两个同相位的相干源, 两列相干波的波峰用实线圆弧表示, 波谷用虚线圆弧表示, 两相邻波峰或波谷之间的距离是一个波长。干涉加强和减弱的地方已在图中标出, 呈线状分布, 称为干涉条纹。

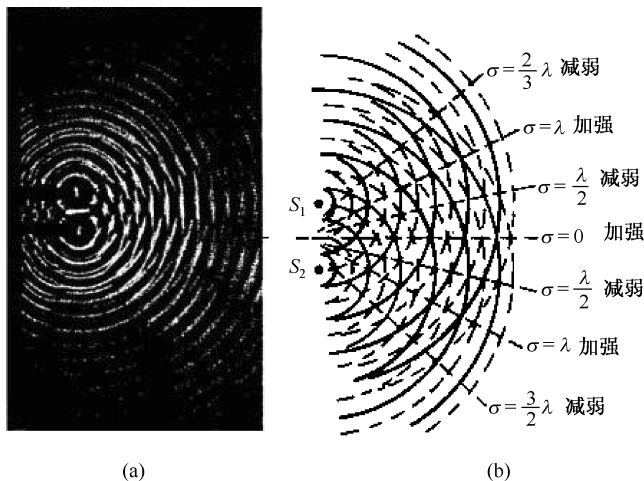


图 10.12 水波干涉现象

应该注意, 干涉现象是波动形式所独具的重要特征之一, 因为只有波动的合成, 才能产生干涉现象。干涉现象对于光学、声学等都非常重要, 对于现代物理学的发展也有重大影响。下面用波的叠加原理定量分析干涉加强和减弱的条件及分布。

两列频率相同、振动方向相同、相位相同或相位差恒定的简谐波, 在空间任何一点相遇。该任意点的两个分振动有恒定的相位差, 但对于空间不同的点, 有着不同的恒定相位差, 因而在空间某些点处, 振动始终加强, 而在另一些点处, 振动始终减弱或完全抵消, 整个区域中强度呈现稳定分布的现象, 这种现象称为**波的干涉**。能产生干涉现象的波称为**相干波**, 相应的波源称为**相干波源**。

设两个相干波源 S_1 、 S_2 (如图 10.13 所示) 的振动分别为

$$y_{10} = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$y_{20} = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

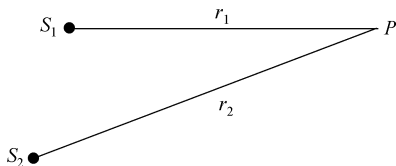


图 10.13 波的干涉

相遇处 P 点两列波动的振动分别为

$$y_1 = A_1 \cos\left(\omega t + \phi_1 - 2\pi \frac{r_1}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = A_2 \cos\left(\omega t + \phi_2 - 2\pi \frac{r_2}{\lambda}\right)$$

相遇处 P 点的合振动方程为

$$y = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (10-33)$$

式中,

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin\left(\varphi_1 - 2\pi \frac{r_1}{\lambda}\right) + A_2 \sin\left(\varphi_2 - 2\pi \frac{r_2}{\lambda}\right)}{A_1 \cos\left(\varphi_1 - 2\pi \frac{r_1}{\lambda}\right) + A_2 \cos\left(\varphi_2 - 2\pi \frac{r_2}{\lambda}\right)}$$

式中, $\Delta\varphi$ 为两列相干波在空间任一点所引起的两个振动的相位差, 有

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \text{常量} \quad (10-34)$$

所以, 每一点的合振幅也是恒量, 并由振幅 A 的表达可以看出, 随着空间各点位置的改变, 即各点到波源的距离差 $r_2 - r_1$ 的不同, 空间各点的振幅也不同。但在满足

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10-35a)$$

的空间点处的合振动的振幅有极大值, 为 $A = A_1 + A_2$, 干涉加强 (相长干涉)。而在满足

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm (2k + 1)\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10-35b)$$

的空间点处的合振动的振幅有极小值, 为 $A = |A_1 - A_2|$, 干涉减弱 (相消干涉)。

由上述讨论可知, 干涉的结果使空间某些点的振动加强, 而另一些点的振动减弱。式 (10-35a) 和式 (10-35b) 分别称为相干波的干涉加强和干涉减弱条件。

上述相干波的干涉加强、减弱条件还可用波程差来表示。在实际问题中, 两个相干波源常常是由同一振动源驱动的, 这时两个波源的相位相同, 即 $\varphi_1 = \varphi_2$ 。此时, 上述干涉条件可以简化, 设两相干波的波程差 $\delta = r_2 - r_1$, 当 δ 满足

$$\delta = r_2 - r_1 = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10-36a)$$

时, 波程差等于零或波长的整数倍的空间各点, 其合振幅最大, 为 $A = |A_1 + A_2|$ 。当

$$\delta = r_2 - r_1 = \pm \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10-36b)$$

时, 波程差等于半波长的奇数倍的空间各点, 其合振幅最小, 为 $A = |A_1 - A_2|$ 。

由上述讨论可知, 若两相干波源为同相源, 当两列波干涉时, 在波程差等于波长的整数倍的各点, 干涉加强; 在波程差等于半波长的奇数倍的各点, 干涉减弱。

由于波的强度正比于振幅的平方, 即 $I \propto A^2$, $I = \frac{1}{2} \rho u A^2 \omega^2$, 所以两列波叠加后的强度为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi \quad (10-37)$$

由此可见, 波干涉的强度随着两列相干波在空间各点相位差的不同而不同, 有些地方加强了 ($I > I_1 + I_2$), 有些地方减弱了 ($I < I_1 + I_2$)。如果有 $I_1 = I_2$ (即 $A_1 = A_2$), 那么叠加后波的强度为

$$I = 2I_1 [1 + \cos(\Delta\varphi)] = 4I_1 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \quad (10-38)$$

当 $\Delta\varphi = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 这些位置波的强度极大, 等于单个波强度的 4 倍, 即 $I = 4I_1$; 当 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 波的强度为零, 即 $I = 0$ 。图 10.14 所示为波的强度随相位变化的分布情况。

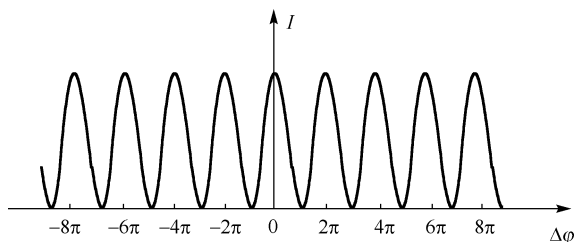


图 10.14 干涉现象的强度分布

按照干涉极值条件, 干涉条纹到两个相干源的距离之差为常数, 应该是一组双曲线。例如, 在 S_1 和 S_2 的中垂线上 $\delta = 0$, 出现干涉极大, 称为 0 级极大。在干涉极大的地方肯定是两列相干波的波峰相遇或波谷相遇(振动同相)的地方, 而干涉极小的地方肯定是两列相干波的波峰和波谷相遇(振动反相)的地方。在图 10.12(a)中, 干涉极大的地方是振动激烈的地方, 图中表现为明暗反差显著, 干涉极小的地方是振动平缓的地方, 图中的明暗反差模糊。

10.4.3 驻波

1. 驻波的定义

现在来讨论两列相干波在同一直线上沿相反方向传播时产生的叠加情况。图 10.15 所示的是一演示驻波的装置。左边放一电音叉 A , 音叉末端系一水平的细绳 AB , B 处有一尖劈, 可左右移动以调节 A 、 B 间的距离 l 。细绳绕过滑轮 P 后, 末端悬一重物 m , 使绳上产生张力。音叉振动时, 细绳随之振动, 调节尖劈的位置使振动稳定, 结果形成图中所示的波动状态。从图中可以看出, 电音叉振动时, 绳上产生行波(横波)向右传播, 到达 B 点时

发生反射, 反射波向左传播并与入射波叠加。叠加后形成的波被分成若干段, 每一段两端的点固定不动, 而每段中的各质点则做振幅不同、相位相同的独立振动。通过以上分析看到, 绳上各点, 只有段与段之间的相位突变, 而没有振动状态或相位的逐点传播, 也没有能量向外传播。所以称**这种振动频率、振动方向和振幅都相同的入射波和反射波叠加后的波为驻波**, 驻波是一种特殊的相干波。在驻波中, 没有振动状态或相位的传播, 也没有能量的传播。在驻波中始终静止不动的点称为**波节**, 振幅最大的点称为**波腹**。

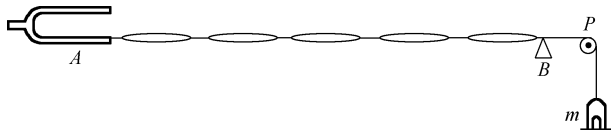


图 10.15 驻波实验

2. 驻波的形成

在图 10.15 所示的装置中, 电音叉振动时, 入射波和反射波叠加, 由于入射波和反射波满足同频率、同振动方向、同振幅、恒相差的相干条件, 于是在绳上发生干涉现象, 形成驻波。由于在两固定端点必须是波节, 因而其波长有一定限制。设入射波的波长为 λ , 形成驻波时, 弦 AB 间的长度 l 必须满足条件

$$l = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10-39)$$

或

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{nu}{2l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (10-40)$$

其中, u 为波速、 ν 为振动频率。上式表明弦线的长度为半波长的整数倍时, 才能形成驻波。

下面用图 10.16 对驻波的形成进行说明。图中虚线表示向右传播的波, 细实线表示向左传播的波。设 $t=0$ 时质点达到最大位移, 此位置记为 $x=0$ 。图中画出了这两列波以及它们合成的驻波在 $t=0, \frac{T}{8}, \frac{T}{4}, \frac{3T}{8}, \frac{T}{2}$ 各时刻的波形, 粗实线表示合成后的波。从图中可以看到, 此时绳上各点, 只有段与段之间的相位突变, 而没有振动状态或相位的逐点传播, 没有波形的移动, 也没有能量向外传播。不论什么时刻, 合成波在波节的位置 (图中以 “N” 表示) 总是不动的, 在两波节之间同一段上所有的点, 振动相位都相同, 各段的中点振幅最大 (图中用 “L” 表示), 这就是波腹。相邻两分段上各点的振动相位相反。它们形成了**驻波**。

在驻波实验中, 反射点 B 是固定不动的, 在该处形成驻波的一个波节, 这一结果说明, 当反射点固定不动时, 反射波和入射波在 B 点处恒反向, 反射波并不是入射波的反向延伸, 而是有 π 的相位突变。因为相距半波长的两点相位差为 π , 所以这个 π 的突变一般称为**半**

波损失。当波在自由端反射时, 则没有相位突变。半波损失是一个较复杂的问题, 但在研究波动问题中却是一个重要的内容, 将在后面章节中详细介绍。

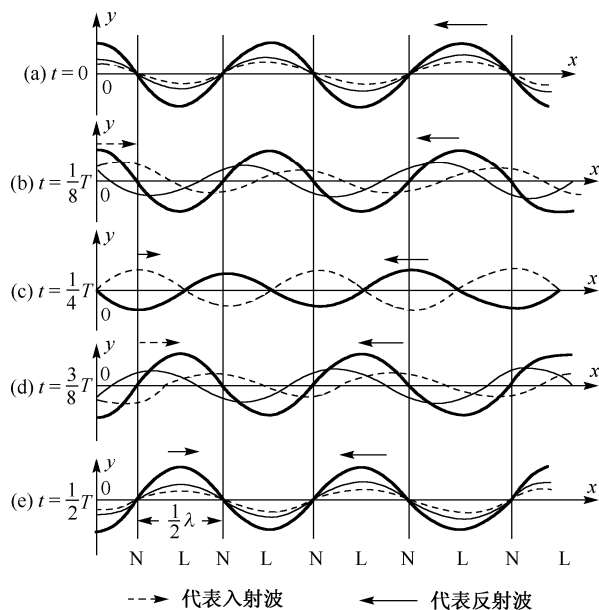


图 10.16 驻波的形成

3. 驻波方程

现在用简谐波的表达式对驻波进行定量分析。设有两列同振幅、反方向传播的相干波在 Ox 轴上传播。为了方便起见, 在它们的波形曲线正好重合的时候, 把位移极大的某一点取作坐标原点, 并开始计时。两列波的原点初相均为零, 它们的波动方程分别为

$$y_1 = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad y_2 = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

其合成波的波动方程为

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \\ &= A \cdot 2 \cos \frac{2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)}{2} \cdot \cos \frac{2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)}{2} \\ &= 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos 2\pi \nu t \end{aligned}$$

即

$$y = \left[2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right] \cos \omega t \quad (10-41)$$

可见，合成后因子 $\cos \omega t$ 是时间的余弦函数，亦即合成后各点都在做同频率的简谐振动；另外，式中 $\left| 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|$ 因子为振幅，是一随 x 做周期变化的全余弦函数，说明合成后各点的振幅是位置 x 的函数。这个关系为驻波的数学表达式。

在式 (10-41) 中 $\left| \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right| = 1$ 处的点，振幅最大。由此可知，当 x 满足

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm k\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

即

$$x = \pm k \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (10-42)$$

时，振幅最大为 $2A$ ，这些点就是驻波的波腹，相邻两波腹的距离为

$$\Delta x = x_{x+1} - x = \frac{\lambda}{2}$$

也就是说，相邻两波腹的距离是半个波长。

当 x 满足

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm (2k+1) \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

即

$$x = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (10-43)$$

时，振幅为零，这些点就是驻波的波节，相邻两波节的距离为

$$\Delta x = x_{x+1} - x = \frac{\lambda}{2}$$

相邻两波节的距离也是半个波长。

从驻波方程式 (10-41) 还可以知道，在波节处质点的振幅为零，且始终处于静止；波腹处的质点振幅最大为 $2A$ ，其他质点的振幅介于零与最大之间，相邻两波节或两波腹之间的距离为半个波长，波节与波腹间的距离是四分之一波长，波腹波节交替排列。

4. 驻波各点的相位和能量

从驻波方程式 (10-41) 的振幅因子看出，振动的各点具有相同的时间因子 $\cos \omega t$ 。现

假设某一时刻 t , $\cos \omega t$ 为正, 这时 $2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$ 随 x 的变化有正有负, 但在相邻的两波节之间 (例如, 在图 10.16 中, $x = -\lambda/4$ 与 $x = \lambda/4$) 的各质点 $2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$ 的符号相同, 因此它们具有相同的相位; 而在两波节两侧, $2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$ 的符号正相反, 因而在两波节两侧的振动质点相位相反。可见, 在驻波中同一段 (把相邻波节之间的所有点, 叫做一段) 上的各点有相同的振动相位; 而两相邻分段上的各点振动相位则相反。因此, 与行波不同, 在驻波进行过程中没有振动状态 (相位) 和波形的定向传播。

再讨论驻波的能量。仍以图 10.15 所示为例分析驻波的能量。当弦线上各质点的位移达到最大值时, 其振动速度为零, 因而动能为零。但此时各质点都离开了平衡位置, 而引起介质的最大形变, 所以这时驻波上的质点的全部能量都是势能。在这时对于弦线各段也都有了不同程度的形变, 且越靠近波节处的形变越大, 因此, 这时驻波的势能基本集中于波节附近。当弦线上各质点同时回到平衡位置时, 弦线的形变完全消失, 势能为零, 但此时各质点的振动速度都达到各自的最大值, 且处于波腹处速度最大, 而在波节处质点的速度为零, 动能为零。所以此时驻波的能量基本集中在波腹附近。至于其他时刻, 动能与势能同时存在。由此可见, 介质在振动过程中, 驻波的动能和势能不断地相互转换, 在转换过程中, 能量不断地由波腹附近转移到波节附近, 再由波节附近转移到波腹附近。这就是说, 在驻波进行过程中没有能量的定向传播。

5. 半波损失

要实际生成一个驻波, 用两个独立的波源, 激发两列同振幅、传播方向相反的相干波来进行叠加是很难做到的, 通常都是通过反射来形成驻波。如图 10.17 所示, 入射波在图中 B 点反射并生成反射波, 反射波和入射波叠加生成驻波。图中的 B 点是一个特殊的点, 对于入射波它是最后一点, 称为**入射点**, 对于反射波它是最开始的一点, 称为**反射点**。入射波和反射波在 B 点的叠加, 实际上就是入射点振动和反射点振动的叠加。如果简单地认为反射点的振动就是入射点的振动, 那么在该点实现的就是两个完全相同的振动的叠加, 理应形成波腹。但在图 10.17(a) 中, B 点是固定不动的, 在该处形成的是驻波的一个波节。要形成波节, 反射点的振动必须与入射点的振动相位相反。这意味着, 图中的反射波在反射的时候, 突然发生了相位突变, 变化了一个 π , 最终的结果是形成了波节。

在谐波方程中, 通常是用波程来计算两点之间的相位差, 如果在波程中扣除半个波长 $\frac{\lambda}{2}$, 则相当于把相位差改变了一个 π , 所以这个 π 的相位突变一般被等效地称为“**半波损失**”。发生半波损失时入射波和反射波叠加的波形曲线如图 10.17(a) 所示, 其中虚线表示入射波, 点虚线表示反射波, 实线表示合成的驻波。注意到入射点与反射点的相位是始终相反的。

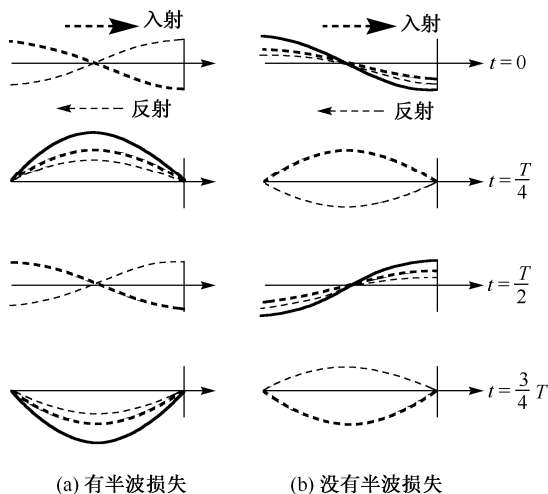


图 10.17 半波损失

并不是所有的反射点都会形成波节。实验表明，当波在介质中传播并在界面反射时，在两种介质的分界面处究竟出现波节还是波腹，取决于两种介质的性质和入射角的大小。在波的能量密度知识点中，介绍过介质的特性阻抗 ρu ，它是介质的密度 ρ 与波速 u 的乘积。两种介质相比较，特性阻抗较大的介质称为**波密介质**，特性阻抗较小的介质称为**波疏介质**。在实验中发现，在波垂直入射界面的情况下，如果波是从波疏介质入射到波密介质界面而反射，反射点将出现波节；如果波是从波密介质入射到波疏介质界面，反射点将出现波腹。也就是说，仅仅在前一种情况下，即由**波疏介质入射到波密介质界面并反射时，才发生半波损失**，即发生相位 π 的突变；在后一种情况下，入射点和反射点的相位是相同的。没有半波损失时入射波和反射波叠加的波形曲线如图 10.17(b)所示。

半波损失也即相位突变问题不仅存在于机械波反射时，也存在于电磁波包括光波反射时。对于光波，把折射率 n 较大的介质称为光密介质，折射率 n 较小的介质称为光疏介质，当光从光疏介质的入射到光密介质表面发生反射时，在反射点处也有半波损失，后而在光学中要用到这些知识。

例 10-6 两相干波源 B 、 C 相距 30 m，振幅均为 0.01 m，初相差为 π 。两波源相向发出平面简谐波，频率均为 100 Hz，波速均为 430 m/s。求：① 两波源的振动方程；② 两谐波的波动方程；③ 在线段 BC 上，因干涉而静止的各点的位置。

解 ① 建立坐标系。设波源 B 位于坐标系的原点 O ，初相 $\varphi_B = 0$ ，则波源 C 的初相 $\varphi_C = \pi$ 。两波源的振动方程分别为

$$y_B = 0.01 \cos 200\pi t \text{ (m)}, \quad y_C = 0.01 \cos(200\pi t + \pi) \text{ (m)}$$

② 设 x 为 B 、 C 间的任一点，则两波的波动方程分别为

$$y_B = 0.01 \cos 200\pi \left(t - \frac{x}{430} \right) \text{ (m)}, \quad y_C = 0.01 \cos \left[200\pi \left(t + \frac{x-30}{430} \right) + \pi \right] \text{ (m)}$$

③ 因干涉而静止的点是合振幅有极小值的点, 故

$$\Delta\varphi = \varphi_C - \varphi_B = \pi + \frac{x-30+x}{430} 200\pi = (2k+1)\pi$$

解之得

$$x = 15 + 2.15k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ (m)}$$

例 10-7 S_1 、 S_2 为两个相干波源, 相互间距为 $\frac{\lambda}{4}$, S_1 的相位比 S_2 的超前 $\frac{\pi}{2}$ 。如果两波在 S_1 和 S_2 的连线方向上各点强度相同, 均为 I_0 , 求 S_1 、 S_2 的连线上 S_1 及 S_2 外侧各点合成波的强度。

解 设 P 为波源 S_1 外侧任意一点, 距离 S_1 为 r_1 , 距离 S_2 为 r_2 , 则 S_1 、 S_2 的振动传到 P 点的相差为

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_{20} - \varphi_{10} + \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\lambda} \left(-\frac{\lambda}{4} \right) = -\pi$$

合振幅 $A = |A_1 - A_2| = 0$, 故 $I_P = 0$ 。

设 Q 为 S_2 外侧的任意一点, 同理可求得 S_1 、 S_2 的振动传到 Q 的相差为

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = 0$$

合振幅 $A = A_1 + A_2 = 2A_1$ 。

合成波的强度与入射波的强度之比 $\frac{I_Q}{I_0} = \frac{4A_1^2}{A_1^2} = 4$, 即 $I_Q = 4I_0$ 。

例 10-8 两列波在一根很长的细绳上传播, 其波动方程为 $y_1 = 0.06 \cos \pi(x - 4t)$ (m); $y_2 = 0.06 \cos \pi(x + 4t)$ (m)。
① 证明细绳上的振动为驻波式振动;
② 求波节和波腹的位置;
③ 波腹处的振幅有多大? 在 $x = 1.2$ m 处的振幅为多少?

解 ① 因合成波的方程为

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = 0.06 \cos \pi(x - 4t) + 0.06 \cos \pi(x + 4t) \\ &= 2 \times 0.06 \times \cos \frac{\pi(x - 4t) + \pi(x + 4t)}{2} \times \cos \frac{\pi(x - 4t) - \pi(x + 4t)}{2} \\ &= 0.12 \cos \pi x \cos 4\pi t \text{ (m)} \end{aligned}$$

故细绳上的振动为驻波式振动。

② 由 $\cos \pi x = 0$ 得 $\pi x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, 故波节位置坐标为

$$x = k + \frac{1}{2}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ (m)}$$

由 $|\cos \pi x| = 1$ 得 $\pi x = k\pi$, 故波腹位置坐标为

$$x = k, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ (m)}$$

③ 由合成波方程知, 波腹处的振幅为

$$A = 0.12 \text{ m}$$

在 $x = 1.2 \text{ m}$ 处的振幅为

$$A_{1.2} = |0.12 \cos 1.2\pi| = 0.097 \text{ m}$$

例 10-9 在 x 轴的原点处有一波源, 振动方程为 $y_0 = A \cos(\omega t + \varphi)$, 发出的波沿 x 轴正方向传播, 波长为 λ , 波在 $x = x_0$ (正值) 处被一刚性壁反射, 如图 10.18 所示。求: ① 入射波方程; ② 入射点振动方程; ③ 反射点振动方程; ④ 反射波方程; ⑤ 驻波方程; ⑥ 所有波腹和波节的位置。

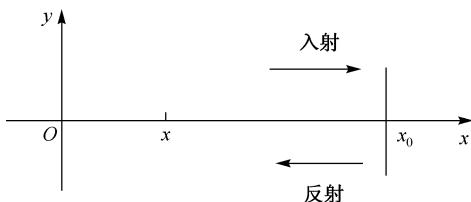


图 10.18 例 10-9 题图

解 ① 波源发出的正行波即为入射波, 从波源到 x 轴上坐标为 x 处, 质点的波程为 x , 所以入射波在 x 处振动的相位比波源落后 $2\pi \frac{x}{\lambda}$, 故入射波方程为

$$y_1 = A \cos \left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi \right)$$

② 入射点振动方程可直接由入射波方程得到

$$y_{1x_0} = A \cos \left(\omega t - 2\pi \frac{x_0}{\lambda} + \varphi \right)$$

③ 反射点为刚性壁, 可理解为波密介质, 因而反射点有相位突变, 反射点振动与入射点振动有相位差 π , 所以反射点振动为

$$y_{2x_0} = A \cos \left(\omega t - 2\pi \frac{x_0}{\lambda} + \pi + \varphi \right)$$

④ 从反射点到 x 处的波程为 $x_0 - x$, 因而反射波在 x 处引起的振动比反射点的相位又要落后 $2\pi \frac{x_0 - x}{\lambda}$, 所以反射波方程为

$$y_2 = A \cos \left(\omega t - 2\pi \frac{x_0}{\lambda} - 2\pi \frac{x_0 - x}{\lambda} + \pi + \varphi \right) = A \cos \left(\omega t + 2\pi \frac{x - 2x_0}{\lambda} + \pi + \varphi \right)$$

注意, 反射波是反行波, 所以 x 的符号是正号。

另外, 反射波方程也可以直接从波源的振动方程和总的相位差得到。现在把入射和反射合并为一个过程来处理。波从波源出发, 先正行到 x_0 处, 然后反行到 x 处, 波程总共为 $2x_0 - x$, 考虑到反射点有半波损失(相位突变), 波程应修正为 $2x_0 - x - \frac{\lambda}{2}$, 因而反射波

在 x 处的振动相位要比波源落后 $2\pi \frac{2x_0 - x - \frac{\lambda}{2}}{\lambda}$, 所以反射波方程应为

$$y_2 = A \cos \left(\omega t - 2\pi \frac{2x_0 - x - \frac{\lambda}{2}}{\lambda} + \varphi \right) = A \cos \left(\omega t + 2\pi \frac{x - 2x_0}{\lambda} + \pi + \varphi \right)$$

⑤ 驻波方程可由入射波方程与反射波方程叠加得到, 即

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = A \cos \left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi \right) + A \cos \left(\omega t + 2\pi \frac{x - 2x_0}{\lambda} + \pi + \varphi \right) \\ &= 2A \cos \left(2\pi \frac{x - x_0}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(\omega t - 2\pi \frac{x_0}{\lambda} + \frac{\pi}{2} + \varphi \right) \end{aligned}$$

⑥ 波腹和波节的位置可以由驻波方程的振幅因子求出, 但最简单的方法是通过反射点的性质来确定反射点是波腹还是波节, 然后按照波腹和波节的排列规律来找出所有波腹、波节的位置。前面已经分析过, 由于反射壁是刚性壁, 反射有半波损失, 所以反射点肯定是波节。既然 $x = x_0$ 处是波节, 再根据相邻波节距离为 $\frac{\lambda}{2}$ 的规律, 得到全部波节的位置是

$$x = x_0 - k \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

由于相邻的波腹和波节相距为 $\frac{\lambda}{4}$, 所以全部波腹的位置是

$$x = x_0 - \frac{\lambda}{4} - k \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

10.5 惠更斯原理和波的衍射

10.5.1 惠更斯原理

波动是振动的传播, 波源振动引起附近各点振动, 这些点又引起更远点的振动, 由此可见, 波动传到的各点在波的产生和传播方面所起的作用和波源没有什么区别, 都是引起它附近介质的振动, 因此波动传到的各点都可以看作是新的波源。

惠更斯在研究波动现象时,于1690年提出,在波的传播过程中,介质中任一波阵面(波前)上的各点,都可以看作是发射子波的波源,其后任一时刻,这些子波的包迹就是新的波阵面,这就是**惠更斯原理**。根据这一原理,只要知道了某一时刻的波面,就可以用几何作图的方法来确定下一时刻的波面,因而解决了波的传播问题。

下面来讨论球面波、平面波新波阵面的具体确定方法。

(1) 球面波情况

如图 10.19(a)所示,设球面波在均匀各向同性介质中传播,波速为 u ,在 t 时刻波阵面是半径为 R 的球面 S_1 ,在 $t+\tau$ 时刻波阵面如何?根据惠更斯原理,以 S_1 面上各点为中心,以 $r=u\tau$ 为半径,画出许多半球形子波,这些子波的包络即为公切于各子波的包迹面,也就是 $t+\tau$ 时刻新的波阵面。显然是以 O 为中心,以 $R+r$ 为半径的球面 S_2 。

(2) 平面波情况

如图 10.19(b)所示,平面波在均匀各向同性介质中传播,波速为 v ,在 t 时刻波阵面为 S_1 (平面),在 $t+\tau$ 时刻波阵面如何?根据惠更斯原理,以 S_1 面上各点为中心,以 $r=v\tau$ 为半径,画出许多半球形子波,这些子波的包络即为公切于各子波的包迹面,也就是 $t+\tau$ 时刻新的波阵面。显然新波阵面是平行于 t 时刻波阵面 S_1 的平面 S_2 。

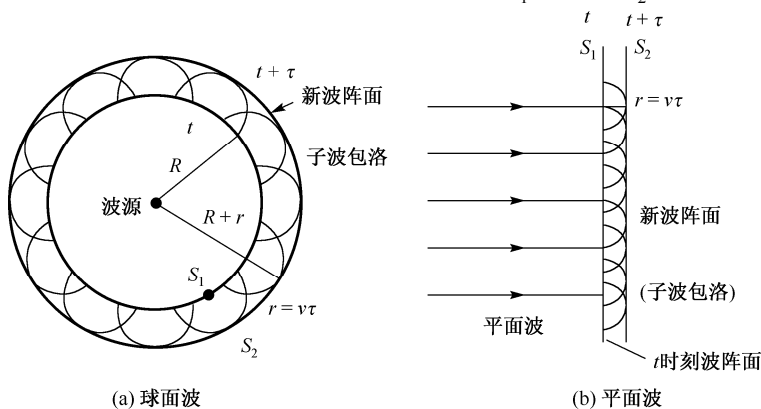


图 10.19 惠更斯原理

根据惠更斯原理,可以说明波在传播中发生的衍射、反射和折射等现象。应该指出,惠更斯原理并没有说明各子波在传播中对某一点振动的相位和振幅究竟有多少贡献,不能给出沿不同方向传播的波的强度,后来菲涅耳对惠更斯原理做了补充,这将在光学部分介绍。

10.5.2 波的衍射

从日常生活中观察到,水波在水面上传播时可以绕过水面上的障碍物而在障碍物的后面传播,在高墙一侧的人可以听到另一侧人的声音,即声波可以绕过高墙从一侧传到另一侧,这些现象说明,水波与声波在传播过程中遇到障碍物时(即波阵面受到限制时),波就

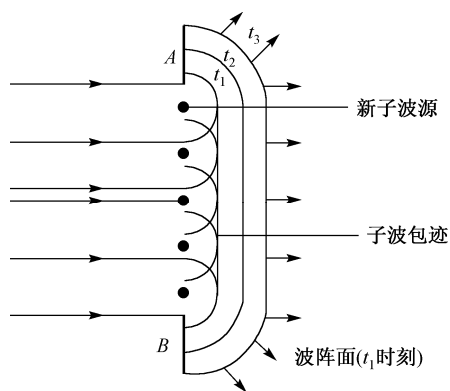


图 10.20 波的衍射

不是沿直线传播的,它可以达到沿直线传播所达不到的区域。这现象称为波的**衍射现象**或**绕射现象**。简单地说,波遇到障碍物后偏离直线传播的现象即为衍射现象。

下面用惠更斯原理说明水波的衍射现象。如图 10.20 所示,水面上有一个宽度与波长接近的狭缝。当水波到达狭缝时,波阵面在狭缝上的所有点都可以看作是发射子波的波源。这些子波在狭缝的前方的包迹就是通过缝后的新的波阵面(波前)。

从图上看,新波阵面(波前)不是直线(波阵面与底面交线),只是中间一部分与原来的波阵面平行,

在缝的边缘地方波阵面发生了弯曲,波线如图所示,这说明水波绕过缝的边缘前进。

相对于波长而言,当障碍物的线度比波长大得多时波的衍射现象不明显,当障碍物的线度与波长接近时衍射现象明显。声波的波长较大,当声波传到门缝或窗缝时,衍射现象明显,因而室内的声音就可经衍射而传到室外。光波的波长很小,所以只有在狭缝极窄的条件下,才能观察到光的衍射现象。

10.6 平面电磁波

根据麦克斯韦的电磁场理论,变化的电场会激发有旋磁场,而变化的磁场则会激发有旋电场。若在空间某处有一个电磁振荡源(交变的电流或电场),则在它周围将激发交变的有旋磁场,同时有旋磁场又激发有旋电场,交变的有旋磁场和有旋电场互相激发,闭合的电场线和磁场线就像链条的环一样一个一个套连下去,在空间传播开来,从而形成了**电磁波**。电磁波又称**电磁辐射**,是由同相振荡且互相垂直的电场与磁场在空间中以波的形式传播,其传播方向垂直于电场和磁场构成的平面,能够有效地传播能量和动量。电磁波是电磁场的一种运动形态。在物理学史上,电磁波是麦克斯韦先从理论上预言电磁波的存在,20年后(1887年),赫兹用实验证实了这个预言。电磁波的发现为近代无线电通信开辟了道路。

10.6.1 电磁波的产生与传播

电磁波是电磁振荡在空间的传播。下面将通过 LC 振荡电路中的电流的周期性变化来说明电磁波是怎样辐射出来的。根据麦克斯韦的电磁场理论,振荡电路能够辐射电磁波。在普通的振荡电路中,振荡频率低,且封闭性高,电场和磁场几乎全部集中在电容器和线圈中,不利于电磁波的辐射。如果把 LC 振荡电路按图 10.21(a)~(e)所示逐步展开,使电容器两极板拉开,同时把线圈拉直变长,最后就变成一条直线型振荡电路。通过这样改造使电场和磁场分散在空间中。通过这种改造,振荡电路中的电感 L 和电容 C 越来越小,从而

提高了振荡的频率, 易于交变的电场和磁场向外发射形成电磁波。对于这样开放的、直线型的电路, 电流在其中往复振荡时, 两端出现正、负交替的等量异号电荷, 而称为**振荡偶极子**或**辐射偶极子**, 如图 10.21 所示。

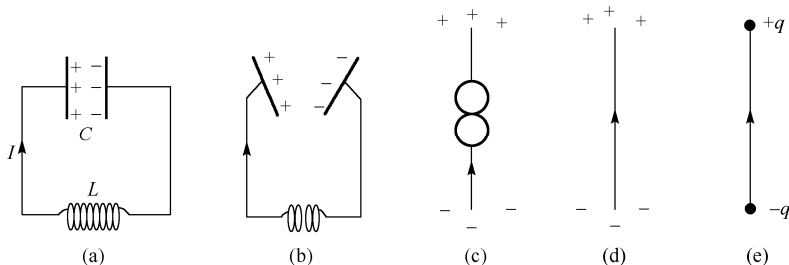


图 10.21 提高振荡电流辐射电磁波的方法

本质上, 任何振动电荷或电荷系都是发射电磁波的波源, 如天线中振荡的电流、原子或分子中电荷的振动都会在其周围空间产生电磁波, 图 10.22 所示为不同时刻振荡偶极子附近的电场线。

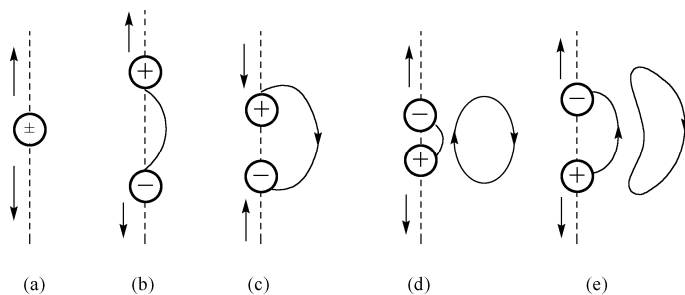


图 10.22 不同时刻振荡偶极子附近的电场线

一对振荡偶极子电荷之间的距离随时间做余弦函数变化, 它的电矩也按余弦函数变化

$$p_e = p_0 \cos \omega t \quad (10-44)$$

这个偶极子周围的电磁场发生变化, 如图 10.23 所示。图中的点表示磁场线 \mathbf{H} , 实线表示电场线 \mathbf{E} 。

①振荡偶极子在真空中远离偶极子的 P 点处, 在时刻 t 的电矢量 \mathbf{E} 和磁矢量 \mathbf{H} 的量值可表为

$$\begin{aligned} E = E_\theta &= \frac{\omega^2 p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \\ H = H_\phi &= \frac{\omega^2 p_0 \sin \theta}{4\pi c r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \end{aligned} \quad (10-45)$$

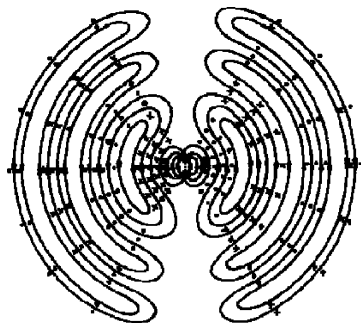


图 10.23 振荡偶极子周围的电磁场

① 此部分为选学内容。

式中, r 是偶极子(在原点)到 P 点矢径 \mathbf{r} 的量值, θ 是矢径 \mathbf{r} 与偶极子轴线的夹角。以偶极子轴线为极轴做一球面, 那么磁场 $H = H_\phi$ 沿球面上纬线方向, 电场 $E = E_\theta$ 沿子午线(经线)方向。

10.6.2 平面电磁波的性质

电磁波在空间传播有各种各样的形式, 最简单、最基本的波型是平面电磁波。平面电磁波是指波阵面为平面的电磁波。在距离波源很远的有限区域内, 实际的球面波可近似为平面波。例如, 振荡偶极子辐射的电磁波为球面波, 但在远离偶极子的区域, $r (\gg \lambda)$ 和 θ 变化很小, 这时就变为平面电磁波。电矢量 \mathbf{E} 和磁矢量 \mathbf{H} 在时刻 t 的量值为

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = E_0 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \\ H &= H_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = H_0 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (10-46)$$

式中, λ 是电磁波的波长, 其波速为 $u = \lambda \nu$, E_0 和 H_0 是电矢量 \mathbf{E} 和磁矢量 \mathbf{H} 的幅值。研究表明, 自由空间的平面电磁波具有以下基本性质。

(1) 平面电磁波是横波, 令 \mathbf{k} 为沿电磁波传播方向的单位矢量, 则

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{H} \perp \mathbf{k}$$

也就是电矢量 \mathbf{E} 和磁矢量 \mathbf{H} 的振动方向与电磁波的传播方向 \mathbf{k} 垂直。

电矢量 \mathbf{E} 和磁矢量 \mathbf{H} 相互垂直, 即

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$$

从式(10-46)可知, \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 同相位。因而, 在任何时刻、任何地点 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 、 \mathbf{k} 三矢量相互垂直,

且满足右手螺旋法则, 即 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 的方向总是沿 \mathbf{k} 的传播方向, 如图 10.24 所示。

(2) 式(10-46)下一步的理论计算表明, 空间任一点的 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的大小有如下关系

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r} E = \sqrt{\mu_0 \mu_r} H \quad (10-47)$$

式中, ϵ_0 、 ϵ_r 分别是真空中的介电常数和相对介电常数。

(3) 电磁波的传播速率 u 与介质的相对介电常数 ϵ_r 和相对磁导率 μ_r 有关。计算表明, 电磁波在介质中传播速率 u 的大小为

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} \quad (10-48)$$

如果在真空中传播, $\epsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$, 故电磁波的速度为



图 10.24 平面电磁波

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (10-49)$$

即真空中电磁波的传播速度正好等于光在真空中的传播速度。麦克斯韦根据这一事实，预言光波就是一种电磁波。

电磁波包括相当宽广的频率范围，是一种巨大的资源。实验证明，无线电波、微波、红外线、可见光、紫外线、X 射线等都是电磁波，在本质上这些电磁波完全相同，只是频率和波长有较大的差异。按照电磁波的频率 ν 、波长 λ 的顺序，把各种电磁波排列起来形成电磁波谱。11.7 节将介绍电磁波谱。实际空间充满了各种具有不同电磁特性的介质，因此电磁波在不同的介质中传播将表现出不同的特性。

10.7 多普勒效应

10.7.1 声波的多普勒效应

前面所讨论的是波源（或观察者）相对于介质静止的波动情况，但在日常生活和科学观测中，经常会遇到波源或观察者相对于介质运动的情况。当声源运动时，所听到声音的音调发生变化，与声源静止时不同。我们坐火车时会发现高速飞驰而来的火车汽笛的音调变高，高速疾驶而去的火车汽笛的音调变低。这表明，如果波源或者观察者相对于介质运动，那么观察者接收到的频率与波源的频率不一致，这种现象是由多普勒（Doppler）在 1842 年首先发现的，称为**多普勒效应**。

为简单起见，讨论观察者、波源共线运动的情况。如图 10.25 所示， S 为波源， u_s 为波源运动速度， u 为波在介质中传播速度， O 为观察者， u_o 为观察者速度。设 ν 为波源 S 与观察者 O 相对静止时观察者测得的频率， ν' 为波源 S 、观察者 O 相对运动时，观察者 O 测得频率。分以下几种情况来讨论。

（1）波源和观察者相对于媒质都静止

观察者所接收到的频率等于单位时间内通过观察者所在处的完整波数目。当波源和观察者相对于媒质都静止时，波源每做一次全振动，波就在空间传播一个波长的距离，结果就有一个完整的波通过观察者，显然观察者接收到的频率 ν' 就等于波源的频率 ν ，即

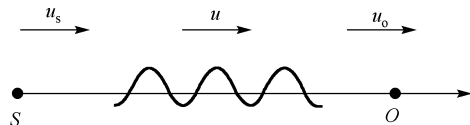


图 10.25 波源和观察者共线的运动

$$\nu' = \frac{u}{\lambda} = \nu \quad (10-50)$$

（2）波源静止，观察者相对于媒质以 u_o 运动

当观察者在媒质中静止不动时，他在单位时间内接收到 $\frac{u}{\lambda}$ 个波。现因观察者以速度 u_o

向波源运动,波相对于观察者速度为 $u' = u + u_o$ 。因为波源静止,所以观察者接收到的波长等于波源发出的波长,但他在单位时间内多接收到 $\frac{u_o}{\lambda}$ 个波,所以他在单位时间内接收到的波数,即他接收到的频率 ν' 应为

$$\nu' = \frac{u'}{\lambda} = \frac{u + u_o}{\lambda} = \frac{u + u_o}{u/\nu} = \left(1 + \frac{u_o}{u}\right)\nu \quad (10-51)$$

当观察者以速度 u_o 远离波源时,波相对于观察者速度为 $u' = u - u_o$,则观察者接收到的频率 ν' 应为

$$\nu' = \frac{u'}{\lambda} = \frac{u - u_o}{\lambda} = \frac{u - u_o}{u/\nu} = \left(1 - \frac{u_o}{u}\right)\nu \quad (10-52)$$

综合以上两种情况,规定当观察者接近波源时 u_o 为正,当观察者远离波源时 u_o 为负,则观察者接收到的频率可以统一表示为

$$\nu' = \left(1 + \frac{u_o}{u}\right)\nu \quad (10-53)$$

(3) 观察者静止,波源相对于媒质以 u_s 运动。如果观察者静止,波源在单位时间内发出的波的个数 ν 分布在长度为 u 的距离内,如图 10.26(a)所示。当波源以 u_s 速度向着观察者运动时,它在单位时间内发出的 ν 个波长被挤在长度为 $(u - u_s)$ 的距离内。如图 10.26(b)所示。观察者接收到的波长为 $\lambda' = \frac{u - u_s}{\nu}$,因而相应观察者接收到的频率为

$$\nu' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{u - u_s}\nu \quad (10-54)$$

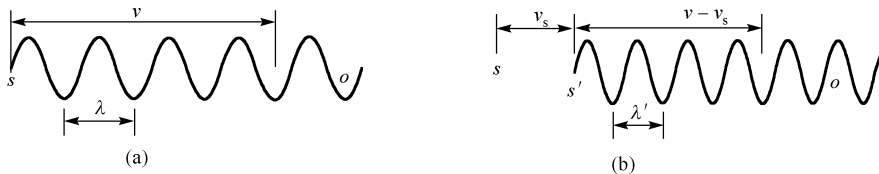


图 10.26 多普勒效应(波源运动观察者不动)

当波源以速度 u_s 远离观察者时,它在单位时间内发出的 ν 个波长分布在长度为 $(u + u_s)$ 的距离内,则观察者接收到的频率 ν' 相应地为

$$\nu' = \frac{u}{\lambda'} = \nu \frac{u}{u + u_s} \quad (10-55)$$

综合以上两种情况,规定当波源接近观察者时 u_s 为正,当波源远离观察者时 u_s 为负,

则观察者接收到的频率可以统一表示为

$$\nu' = \nu \frac{u}{u - u_s} \quad (10-56)$$

(4) 波源和观察者都运动

根据 (2)、(3) 所述, 观察者运动相当于他感觉到的波速变化为 $u + u_o$, 而波源运动相当于波长变化为 $\frac{u - u_s}{\nu}$ 。综合这两种分析, 可得当波源和观察者都运动时, 观察者接收到的频率为

$$\nu' = \frac{u'}{\lambda'} = \frac{u + u_o}{u - u_s} \nu \quad (10-57)$$

式 (10-57) 可把上面所有情况统一起来。应当指出, 无论波源和观察者是相向运动还是彼此背离, 该式都是成立的。

其符号规定为: 当波源和观察者相向运动时, u_o 和 u_s 均取正值; 当波源和观察者相背运动时, u_o 和 u_s 均取负值; 如果波源和观察者的相对运动方向垂直, 则观察者接收到波的频率不变, 没有多普勒效应; 如果波源和观察者的相对运动方向为任意方向, 只要将速度在连线上的分量带入上述公式即可。

例 10-9 ① 一辆汽车的喇叭声频率为 400 Hz, 以 34 m/s 的速度在一笔直的公路上行驶。站在公路边的观察者测得这辆汽车的喇叭声的频率是多少? 声音在空气中传播的速度为 340 m/s。② 如果上述的汽车停在公路旁, 观察者乘坐的汽车的速度是 34 m/s, 那么, 观察者测得这辆汽车喇叭声的频率是多少?

解 ① 如果汽车驶向观察者, 观察者测得的频率为

$$\nu' = \nu \frac{u_o}{u - u_s} = 400 \times \frac{340}{340 - 34} = 444 \text{ Hz}$$

如果汽车驶离观察者, 测得的频率为

$$\nu' = \nu \frac{u_o}{u + u_s} = 400 \times \frac{340}{340 + 34} = 364 \text{ Hz}$$

② 如果观察者驶向停在路边的汽车, 观察者测得的频率为

$$\nu' = \nu \frac{u + u_o}{u} = 400 \times \frac{340 + 34}{340} = 440 \text{ Hz}$$

如果观察者驶过停在路边的汽车, 观察者测得的频率为

$$\nu' = \nu \frac{u - u_o}{u} = 400 \times \frac{340 - 34}{340} = 360 \text{ Hz}$$

10.7.2 电磁波的多普勒效应与红移现象

多普勒效应是波动过程的共同特征, 不仅机械波有多普勒效应, 电磁波(包括光波)也有多普勒效应。因为电磁波的传播不依赖弹性介质, 所以波源和观测者之间的相对运动速度决定了观测者接收到的频率。电磁波以光速传播, 在涉及相对运动时应考虑相对论时空变换关系。

当波源和观测者在同一直线上运动时, 计算证明

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{c+u_r}{c-u_r}} \quad (10-58)$$

式中 u_r 为波源和观察者之间相对运动的速度, 当波源与观测者相互接近时, u_r 取正值; 反之, u_r 取负值。 ν 为波源的频率, ν' 为观察者接收到的频率。

观测者接收到的频率比波源的发射频率高, 称为**紫移**; 观测者接收到的频率比波源的发射频率低, 称为**红移**。

目前, 多普勒效应已在科学研究、工程技术、交通管理、医疗诊断等各方面被广泛应用。例如, 医学上利用超声波的多普勒效应来检查人体内脏, 血管的运动和血液的流速、流量等情况。在工矿企业中则利用多普勒效应来测量管道中悬浮物液体的流速。电磁波的多普勒效应为跟踪人造卫星和监测汽车等运动目标的速度提供了一种简便的方法, 从微波源发出的微波射向汽车或卫星, 反射回来微波的频率有少量改变, 将接收到的微波信号同原频率的信号合成为拍, 测出拍频就能算出多普勒频移值, 进一步可计算出汽车或卫星的速度。分子、原子和离子由于热运动产生的多普勒效应使其发射和吸收的谱线增宽。在天体物理和受控热核聚变实验装置中, 谱线的多普勒增宽已成为一种分析恒星大气、等离子体物理状态的重要测量和诊断手段。天文学家将来自星球的光谱与地球上相同元素的光谱进行比较, 发现星球光谱几乎都发生红移, 由此可推断出这些星球都向着背离地球的方向运动, 即“退行”, 并能计算这些星球的退行速度。这一观测结果被视为“大爆炸”宇宙学理论的重要证据。

本章提要

1. 机械波的形成

形成机械波必须具备振源和传播振动的媒质。

2. 横波与纵波

质元的振动方向和波的传播方向相互垂直的波称为横波。质元的振动方向和波的传播方向一致的波称为纵波。

3. 描述波动的几个物理量

波长：在同一波线上两个相邻的、相位差为 2π 的振动质元之间的距离，叫做波长，用 λ 表示。

周期：波前进一个波长的距离所需要的时间，用 T 表示。

频率：周期的倒数叫做波的频率，用 ν 表示，即 $\nu = \frac{1}{T}$ ，频率等于单位时间内波动传播距离中完整波的数目。波的周期（或频率）等于波源的振动周期（或频率）。

波速：在波动过程中，某一振动状态（即振动相位）在单位时间内所传播的距离叫做波速，用 u 表示。

它们的关系是 $u = \frac{\lambda}{T}$ 或 $u = \lambda \nu$ ，对各类波都适用。

4. 平面简谐波波动方程

描述介质中各质元的任意时刻的振动方程称为波动方程，其标准式有

$$y = A \cos \left[\omega \left(t \mp \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad \text{或} \quad y = A \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right]$$

式中负号对应于正行波（波沿着 x 轴正向传播），正号对应于反行波（波沿着 x 轴负向传播）。

5. 波的能量

介质中单位体积的波动能量，称为波的能量密度 w ，表达式为

$$w = \frac{dE}{dV} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

能量密度在一个周期内的平均值，称为平均能量密度，用 \bar{w} 表示，

$$\bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T w dt = \frac{1}{T} \int_0^T \rho \omega^2 A^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] dt = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$$

6. 波的强度

波的平均能流是指一个周期内通过与波的传播方向垂直的某个面的能量。通过 ΔS 的平均能流为

$$\bar{P} = \bar{w} u \Delta S$$

波的平均能流密度（波的强度）是指单位时间通过与波的传播方向垂直的单位面积的平均能量，也称为波的强度，用 I 表示， $I = \bar{w} u = \frac{1}{2} \rho u A^2 \omega^2$ 。

7. 惠更斯原理

在波的传播过程中,波阵面(波前)上的每一点都可以看作是发射子波的波源,在其后的任一时刻,这些子波的包迹就成为新的波阵面,这就是惠更斯原理。

8. 波的叠加原理

几列波在空间相遇时,在相遇区域内,任一点处质点的振动都是各个波单独引起的振动的合成。即在任一时刻,该点处质点的振动位移是各列波在该点引起的矢量和。这一规律称为波的叠加原理。

9. 波的干涉

两列频率相同,振动方向相同,相位相同或相位差恒定的简谐波在空间相遇时,在空间某些点处,振动始终加强,而在另一些点处,振动始终减弱或完全抵消,这种现象称为干涉现象。能产生干涉现象的波称为相干波,相应的波源称为相干波源。

当两个相干波源具有相同的初相位时,

若 $\delta = r_1 - r_2 = \pm k\lambda$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $A = |A_1 + A_2|$, 干涉加强(相长干涉)。

若 $\delta = r_1 - r_2 = \pm(k + \frac{1}{2})\lambda$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $A = |A_1 - A_2|$, 干涉减弱(相消干涉)。

其中, $\delta = r_1 - r_2$ 表示从波源 S_1 、 S_2 发出的两列相干波到干涉点的波程差。

两列相干波源为同相位时,在两列波的叠加区域内,波程差等于零或等于波长的整数倍的各点的振幅最大;波程差等于半波长的奇数倍的各点的振幅最小。

10. 驻波

两列频率、振动方向和振幅都相同而传播方向相反的简谐波,叠加后形成驻波。驻波是一种特殊的相干波。在驻波中,没有振动状态(相位)、波形和能量的传播,只有恒定的波腹和波节出现。

$$\text{驻波方程: } y = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos 2\pi \nu t$$

$$\text{波节位置: } x = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{波腹位置: } x = \pm k \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

11. 波的衍射

波传播过程中,当遇到障碍物时,若障碍物的线度与波长接近时,波能绕过障碍物边缘而偏离直线在障碍物的后面传播的现象称为波的衍射。

12. 平面电磁波

电磁波是由变化的电场和磁场相互激发产生的, 即同相振荡且互相垂直的电场与磁场在空间中以波的形式传播, 其传播方向垂直于电场和磁场构成的平面。平面电磁波是指波阵面为平面的电磁波。在距离波源很远的有限区域内, 实际的球面波可近似为平面波。

平面电磁波是横波, 也就是电场强度 E 与磁场强度 H 的振动方向与电磁波的传播方向 \mathbf{k} (单位矢量) 垂直。电场强度 E 与磁场强度 H 随时间的变化是同相的。电磁波的传播速率 u 与介质的相对介电常数 ϵ_r 和相对磁导率 μ_r 有关, $u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o \epsilon_r \mu_o \mu_r}}$, 在真空中传播的电

磁波的速度为 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o \mu_o}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ 。

14. 多普勒效应

如果波源或者观测者相对于介质运动, 那么观测者接收到的频率与波源的频率不一致, 这种现象称为多普勒效应。

(1) 机械波的多普勒效应

当波源和观测者在同一直线上运动时, 观测者接收到的频率为 $\nu' = \nu \frac{u + u_o}{u - u_s}$ 。其中 ν 为

波源的频率, u 为波在介质中传播速度, u_s 为波源运动速度, u_o 为观测者运动速度。波源和观测者相向运动, u_o 和 u_s 均取正值; 波源和观测者相背运动, u_o 和 u_s 均取负值。

(2) 电磁波的多普勒效应

当波源和观测者在同一直线上运动时, 观测者接收到的频率为 $\nu' = \nu \sqrt{\frac{c + u_r}{c - u_r}}$, 式中 u_r 为

波源和观测者之间相对运动的速度, 波源与观测者相互接近时, u_r 取正值; 反之, u_r 取负值。

观测者接收到的频率比波源的发射频率高, 称为紫移; 观测者接收到的频率比波源的发射频率低, 称为红移。

阅读材料

超声波在医学上的应用

超声波是频率高于 20000 Hz 的声波, 它方向性好, 穿透能力强, 易于获得较集中的声能, 在液体中传播距离远, 可用于测距、测速、清洗、碎石、杀菌消毒等。超声波在医学上的应用相当广泛, 主要利用超声波良好的指向性和与光学相似的反射、散射、衰减和多

普勒效应等物理规律。利用超声发生器把超声波发射到体内,并在组织内传播。病变组织的声阻抗与正常组织有差异,用接收器把反射和散射波接收下来,经过处理显像后就可对病变进行诊断,如A超、B超和多普勒血流仪等。由于超声波对人体无害,超声波检测技术广泛应用于组织形貌检测,器官病变的诊断,血管的通畅程度判断,胎儿成长情况鉴定,等等。使得医生可以提前看到人体内部组织的病变情况,提早诊断,尽早治疗,让广大患者得到了福音。现在,随着超声波技术的进一步发展,超声波碎石技术,超声波手术刀已经得到应用,患者已经可以在无须开刀的前提下完成手术,大大减轻了患者的痛苦和手术的风险。随着计算机技术和相关技术的发展,超声检测也向着全息影像技术方向发展。这样医生可以得到更直观、更全面、更详细的人体内部组织图像,为手术方案的确定和疾病的治疗带来极大的帮助。

目前,医生们应用的超声诊断方法有不同的形式,可分为A型、B型、M型及D型四大类。

A型:是以波形来显示组织特征的方法,主要用于测量器官的径线,以判定其大小。可用来鉴别病变组织的一些物理特性,如实质性、液体或是气体是否存在等。

B型:用平面图形的形式来显示被探查组织的具体情况。检查时,首先将人体界面的反射信号转变为强弱不同的光点,这些光点可通过荧光屏显现出来,这种方法直观性好,重复性强,可供前后对比,所以广泛用于妇产科、泌尿、消化及心血管等系统疾病的诊断。

M型:是用于观测活动界面时间变化的一种方法。最适用于检查心脏的活动情况,其曲线的动态改变称为超声心动图,可以用来观测心脏各层结构的位置、活动状态、结构的状况等,多用于辅助心脏及大血管疾病的诊断。

D型:是专门用来检测血液流动和器官活动的一种超声诊断方法,又称为多普勒超声诊断法。可确定血管是否通畅,管腔是否狭窄或闭塞以及病变部位。新一代的D型超声波还能定量地测定管腔内血液的流量。近年来,科学家又研制开发了彩色编码多普勒系统,可在超声心动图的解剖标志的指示下,以不同颜色显示血流的方向,色泽的深浅代表血液的流速。此外还有立体超声显像、超声CT、超声内窥镜等超声技术不断涌现出来,并且还可以与其他检查仪器结合使用,使疾病的诊断准确率大大提高。

超声手术刀是采用超声能对软组织进行止血切开和凝固,适用于对须要控制出血和最小程度热损伤的软组织进行切开,被广泛地应用于外科手术中。超声手术刀可以用来配合或取代高频手术刀、激光手术刀和钢制手术刀,大大拓宽了超声治疗的应用领域。超声白内障乳化是超声外科手术在眼科中的应用。主要利用超声波的空化效应。从3 mm到5 mm切口处将白内障乳化后吸除,再将人工晶体经切口植入。利用超声乳化技术后,手术时间短,无出血,切口长度比常规手术大大缩小,能保持正常眼压,因此,术后散光和炎症反应明显减少,视力可早期恢复。超声骨科手术主要利用超声波机械效应,它既可以用于骨骼的切割,如心胸外科切胸骨、脑神经外科开颅、手术切开椎板、骨肿瘤摘除、在骨干上

切开“窗口”，又可以用于各种骨组织整形修复，如关节手术对关节腔中的半月板进行修复、骨科的矫形、面额骨整形美容，等等。超声骨科手术的独特优点在于，骨科手术中超声刀省力，切缘整齐；激化了凝血酶的活性，使手术中出血少，手术视野清晰；因此可用于安全性要求高的场合。

利用强度较低的超声波的热效应和机械效应，用聚焦或非聚焦声束对疾病部位进行“加热”和机械刺激来治疗某些疾病，这称为超声理疗。超声理疗主要包括超声按摩，超声针灸及超声热疗等。超声按摩和针灸对于治疗某些皮肤病、坐骨神经痛和某些神经疾病、脑血栓及促进伤口愈合和囊肿的吸收等都有较好的效果。经过数十年的实验尝试表明，用聚焦超声可有效地抑制某些癌细胞的生长，甚至杀死癌细胞，而正常组织则不受影响。这表明超声治疗癌症很有前景。

超声波技术正在医学界发挥着巨大的作用，随着科学的进步，它将更加完善，将更好地造福于人类。

习题

10.1 一平面简谐波沿 Ox 正方向传播，波动表达式为 $y = 0.10 \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} \right) + \frac{t}{2} \right]$ (SI 单位)，该波在 $t = 0.5 \text{ s}$ 时刻的波形图是 ()。

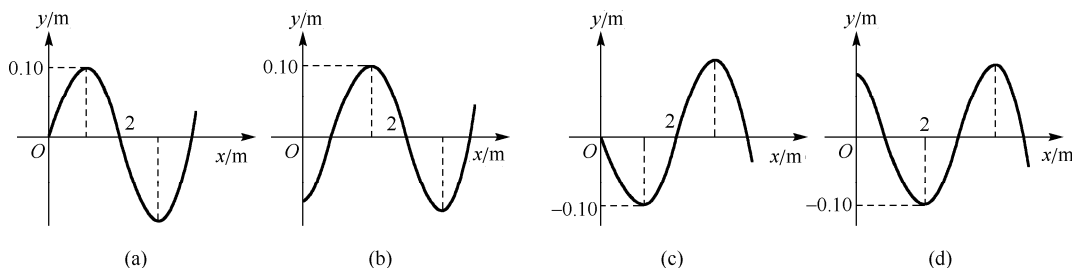


图 10.27 习题 10.1 图

10.2 横波以波速 u 沿 x 轴负方向传播。 t 时刻波形曲线如图 10.28。则该时刻 ()。

- A. A 点振动速度大于零
- B. B 点静止不动
- C. C 点向下运动
- D. D 点振动速度小于零

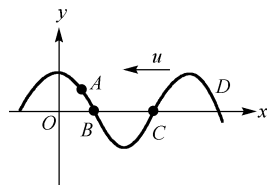


图 10.28 习题 10.2 图

10.3 若一平面简谐波的表达式为 $y = A \cos(Bt - Cx)$ ，式中 A 、 B 、 C 为正值常量，则 ()。

- A. 波速为 C B. 周期为 $1/B$ C. 波长为 $2\pi/C$ D. 角频率为 $2\pi/B$

10.4 频率为 100 Hz, 传播速度为 300 m/s 的平面简谐波, 波线上距离小于波长的两点振动的相位差为 $\pi/3$, 则此两点相距 ()。

- A. 2.86 m B. 2.19 m C. 0.5 m D. 0.25 m

10.5 一平面简谐波以速度 u 沿 x 轴正方向传播, 在 $t=t'$ 时波形曲线如图 10.29 所示。则坐标原点 O 的振动方程为 ()。

- A. $y = a \cos \left[\frac{u}{b}(t-t') + \frac{\pi}{2} \right]$ B. $y = a \cos \left[2\pi \frac{u}{b}(t-t') - \frac{\pi}{2} \right]$
C. $y = a \cos \left[\pi \frac{u}{b}(t+t') + \frac{\pi}{2} \right]$ D. $y = a \cos \left[\pi \frac{u}{b}(t-t') - \frac{\pi}{2} \right]$

10.6 图 10.30 所示为一简谐波在 $t=0$ 时刻的波形图, 波速 $u=200$ m/s, $A=0.1$ m, 则 P 处质点的振动速度表达式为 ()。

- A. $v = -0.2\pi \cos(2\pi t - \pi)$ (SI) B. $v = -0.2\pi \cos(\pi t - \pi)$ (SI)
C. $v = 0.2\pi \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ (SI) D. $v = 0.2\pi \cos\left(\pi t - \frac{3\pi}{2}\right)$ (SI)

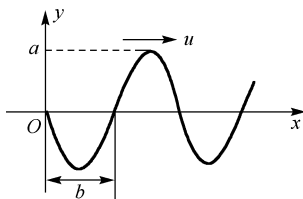


图 10.29 习题 10.5 图

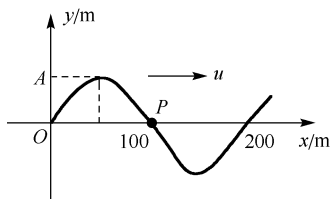


图 10.30 习题 10.6 图

10.7 如图 10.31 所示, 一平面简谐波沿 x 轴正向传播, 已知 P 点的振动方程为 $y = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, 则波的表达式为 ()。

- A. $y = A \cos\{\omega[t - (x-l)/u] + \varphi_0\}$ B. $y = A \cos\{\omega[t - (x/u)] + \varphi_0\}$
C. $y = A \cos \omega(t - x/u)$ D. $y = A \cos\{\omega[t + (x-l)/u] + \varphi_0\}$

10.8 如图所示, S_1 和 S_2 为两相干波源, 它们的振动方向均垂直于图面, 发出波长为 λ 的简谐波, P 点是两列波相遇区域中的一点, 已知 $\overline{S_1P} = 2\lambda$, $\overline{S_2P} = 2.2\lambda$, 两列波在 P 点发生相消干涉。若 S_1 的振动方程为 $y_1 = A \cos\left(2\pi + \frac{1}{2}\pi\right)$, 则 S_2 的振动方程为 ()。

- A. $y_2 = A \cos\left(2\pi t - \frac{1}{2}\pi\right)$ B. $y_2 = A \cos(2\pi t - \pi)$
C. $y_2 = A \cos\left(2\pi t + \frac{1}{2}\pi\right)$ D. $y_2 = A \cos(2\pi t - 0.1\pi)$

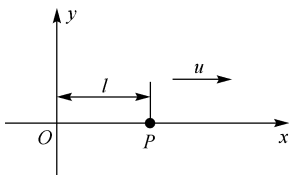


图 10.31 习题 10.7 图

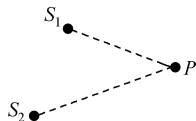


图 10.32 习题 10.8 图

10.9 沿着相反方向传播的两列相干波，其表达式为 $y_2 = A \cos 2\pi \left(\nu t + \frac{x}{\lambda} \right)$ 和 $y_2 = A \cos 2\pi \left(\nu t + \frac{x}{\lambda} \right)$ 。在叠加后形成的驻波中，各处简谐振动的振幅为 ()。

- A. A B. $2A$ C. $2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ D. $\left| 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|$

10.10 一平面简谐波(机械波)沿 x 轴正方向传播,波动表达式为 $y = 0.2 \cos \left(\pi t - \frac{1}{2} \pi x \right)$ (SI), 则在 $x = -3\text{m}$ 处媒质质点的振动加速度 a 的表达式为_____。

10.11 一列平面简谐波沿 x 轴正向无衰减地传播,波的振幅为 $2 \times 10^{-3} \text{ m}$, 周期为 0.01 s , 波速为 $400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。当 $t = 0$ 时 x 轴原点处的质元正通过平衡位置向 y 轴正方向运动, 则该简谐波的表达式为_____。

10.12 一声纳装置向海水中发出超声波, 其波的表达式为 $y = 1.2 \times 10^{-3} \cos(3.14 \times 10^5 t - 220x)$ (SI), 则此波的频率 $\nu =$ _____, 波长 $\lambda =$ _____, 海水中声速 $u =$ _____。

10.13 S_1 、 S_2 为振动频率、振动方向均相同的两个点波源, 振动方向垂直于纸面, 两者相距 $\frac{3}{2}\lambda$ (λ 为波长), 如图 10.33 所示。已知 S_1 的初相为 $\frac{1}{2}\pi$ 。

① 若使射线 S_2C 上各点由两列波引起的振动均为干涉相消, 则 S_2 的初相应为_____。

② 若使 S_1 、 S_2 连线的中垂线 MN 上各点由两列波引起的振动均干涉相消, 则 S_2 的初位相应为_____。

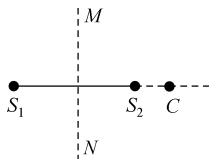


图 10.33 习题 10.13 图

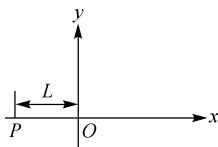


图 10.34 习题 10.14 图

10.14 如图 10.34 所示, 一平面简谐波沿 Ox 轴负方向传播, 波长为 λ , 若 P 处质点的振动方程是 $y_p = A \cos(2\pi \nu t + \pi/2)$, 则该波的表达式为_____; P 处质点

在_____时刻的振动状态与 O 处质点在 t_1 时刻的振动状态相同。

10.15 一平面简谐波沿 O_x 轴正方向传播, 波长为 λ 。若如图 p_1 点处质点的振动方程为 $y_1 = A \cos(2\pi\nu t + \varphi)$, 则 p_2 点处质点的振动方程为_____; 与 p_1 点处质点振动状态相同的那些点的位置是_____。

10.16 一简谐波沿 x 轴正方向传播。 x_1 和 x_2 两点处的振动曲线分别如图 10.36(a)、(b) 所示。已知 $x_2 > x_1$ 且 $x_2 - x_1 < \lambda$ (λ 为波长), 则 x_2 点的相位比 x_1 点的相位滞后_____。

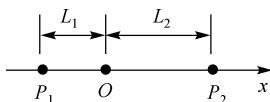


图 10.35 习题 10.15 图

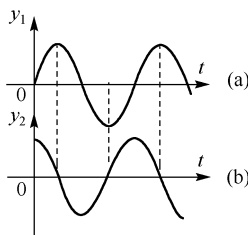


图 10.36 习题 10.16 图

10.17 在截面积为 S 的圆管中, 有一列平面简谐波在传播, 其波的表达式为 $y = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$, 管中波的平均能量密度是 w , 则通过截面积 S 的平均能流为_____。

10.18 如图 10.37 所示, A 和 B 是两个同相位的波源, 相距 $d = 0.10 \text{ m}$, 同时以 30 Hz 的频率发出波动, 波速为 $0.50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, P 点与 AB 成 30° 角, 与 A 相距为 4 m 处, 求两波通过点 P 的相位差。

10.19 一横波沿绳子传播, 其波的表达式为 $y = 0.05 \cos(100\pi t - 2\pi x) \text{ (SI)}$, 求:

- ① 此波的振幅、波速、频率和波长;
- ② 绳子上各质点的最大振动速度和最大振动加速度;
- ③ $x_1 = 0.2 \text{ m}$ 处和 $x_2 = 0.7 \text{ m}$ 处两质点振动的相位差。

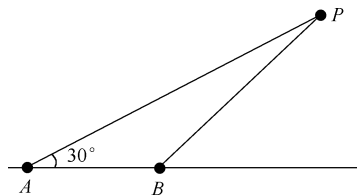


图 10.37 习题 10.18 图

10.20 一平面简谐波沿 Ox 轴正方向传播, 波的表达式为 $y = A \cos 2\pi(\nu t - x/\lambda)$, 而另一平面简谐波沿 Ox 轴负方向传播, 波的表达式为 $y = A \cos 2\pi(\nu t + x/\lambda)$, 求:

- ① $x = \frac{\lambda}{4}$ 处介质质点的合振动方程;
- ② $x = \frac{\lambda}{4}$ 处介质质点的速度表达式。

10.21 图 10.38 所示为一平面简谐波在 $t = 0$ 时刻的波形图, 求: ① 该波的波动表达式; ② P 点处质点的振动方程。

10.22 图 10.39 所示为一平面余弦波在 $t = 0$ 时刻和 $t = 2 \text{ s}$ 时刻的波形图。已知波速为 u , 求: ① 坐标原点处介质质点的振动方程; ② 该波的波动表达式。

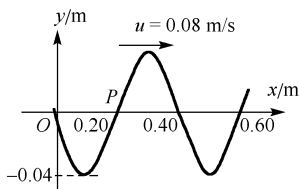


图 10.38 习题 10.21 图

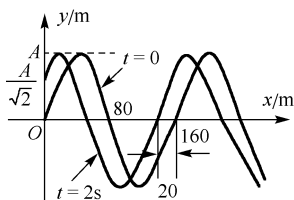


图 10.39 习题 10.22 图

10.23 平面简谐波沿 x 轴正方向传播, 振幅为 2 cm , 频率为 50 Hz , 波速为 200 m/s 。在 $t = 0$ 时, $x = 0$ 处的质点正在平衡位置向 y 轴正方向运动, 求 $x = 4\text{ m}$ 处媒质质点振动的表达式及该点在 $t = 2\text{ s}$ 时的振动速度。

10.24 如图 10.40 所示, 一平面简谐波沿 x 轴正方向传播, BC 为波密媒质的反射面。波由 P 点反射, $\overline{OP} = \frac{3\lambda}{4}$, $\overline{DP} = \frac{\lambda}{6}$ 。在 $t = 0$ 时, O 处质点的合振动是经过平衡位置向负方向运动。求 D 点处入射波与反射波的合振动方程。(设入射波和反射波的振幅皆为 A , 频率为 ν 。)

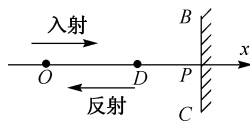


图 10.40 习题 10.24 图

10.25 电磁波的传播速率为 $3 \times 10^8\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 一电磁波源以 5 kW 的功率发射电磁波, 求距离波源 50 km 处电磁波的强度和平均能量密度。

第 11 章 光的干涉和衍射

19 世纪初，人们发现光有干涉、衍射和偏振等现象，这些现象是波动的特征，与微粒说不相容。1801 年英国物理学家托马斯·杨 (T.Young, 1773~1829) 首先利用双缝实验显示了光的干涉现象，并第一次成功地测定了光的波长。后来，1862 年，傅科 (J.H.Foucault) 又用实验方法测定了水中的光速，证实水中的光速小于空气中的光速，这些事实为光的波动说提供了重要的实验证据。19 世纪 60 年代，麦克斯韦 (J.C.Maxwell, 1831—1879) 根据其电磁场理论的四个基本方程，预言了“电磁波”的存在，并认为光就是一种电磁波。德国物理学家赫兹 (H.R.Hertz, 1857—1894) 于 1888 年用实验证实了电磁波的存在，并证明电磁波与光一样能产生反射、折射、干涉、偏振等现象，光和电磁现象的一致性再次证明了自然现象是存在相互联系的。但是，自 19 世纪末到 20 世纪初，爱因斯坦等科学家又发现了光电效应现象，这一现象不能用波动理论来解释，必须假定光是由具有一定能量和动量的粒子所组成的粒子流，这种粒子称为光子。从而，人们认识到光具有波动性和粒子性的两重性质。

光的干涉和衍射现象表明光具有波动性，但不能说明光是纵波还是横波。在光的电磁理论建立之前，在杨氏双缝实验成功后不久，马吕斯 (E.I.Malus) 于 1809 年就在实验中发现了光的偏振现象，表明光的横波性。电磁理论和实验事实指出，在自由空间传播的光波是一种横波，光波中沿垂直于传播方向振动着的物理量是电场矢量和磁场矢量，在光和物质的相互作用过程中主要是光波的电矢量 \mathbf{E} 起作用，常以电矢量 \mathbf{E} 作为光波中振动矢量的代表。

本章主要通过光的干涉、衍射、偏振等一般现象来研究波动的重要特征，波的粒子性在后面的章节中研究。

11.1 光源和光的相干性

11.1.1 光源、单色光、相干光

1. 普通光源

发光体称为光源。各种光源的激发机理不同，普通光源的发光是光源中大量的原子或分子进行的一种微观过程，与原子中的电子（或分子中的离子）的运动状态有关。微观粒子发光的过程是一种量子过程。一个孤立的原子，它的能量只允许处在一系列的分立能级 E_1 、 E_2 、 \cdots 、 E_n 上。通常原子总是处在最低的能级 E_1 上，这种状态称为**基态**，基态是稳

定态。如果在外界作用下, 原子吸收了外界能量跃迁到较高的能级上, 结果使该原子处于激发态。处于激发态的原子是不稳定的, 原子在激发态停留的时间非常短, 经过极短时间 (大约 10^{-8} s) 就会自行跃迁至低能态 (E_m) 或基态, 同时自发地辐射出光子, 辐射出的光子的能量是量子化的, 即 $h\nu = E_n - E_m$, 这种现象称为**自发辐射** (如图 11.1(a)所示)。普通光源的发光以**自发辐射**为主。原子或分子每次只能发射一列频率一定、振动方向一定、长度有限的光波, 常称为**光波列**, 如图 11.1(b)所示, 光波列的长度满足

$$l = c\Delta t \quad (11-1)$$

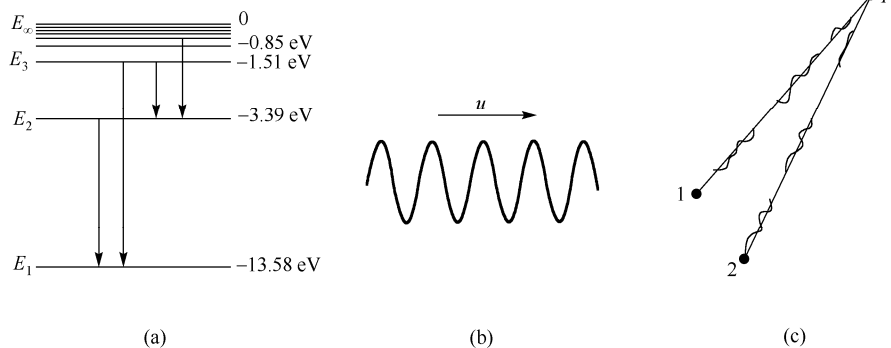


图 11.1 (a)氢原子的能级; (b)一个光波波列示意图; (c)波列的叠加

普通光源发光具有二个显著的特点, 间歇性和无规则性。在实际的光源内, 有非常多的原子在发光。所观察到的光是由光源中的许多原子发出的、许许多多相互独立的波列组成的。尽管在有些条件下, 可以使这些波列的频率相同, 但是当两个独立的光源, 或同一光源上的两部分发出的光相叠加时, 这些波列的光振动方向不可能都相同, 相位差也不能保持恒定, 如图 11.1(c)所示。

2. 单色光

具有单一频率的光波称为单色光, 严格的单色光是不存在的, 任何光源所发出的光波都有一定的频率或波长范围, 在这些范围内各种波所对应的强度是不相等的, 以波长或频率为横坐标, 以波的强度为纵坐标, 可以直观地表示出这种强度与波长之间的关系, 称为光谱曲线或谱线, 谱线对应的波长越窄, 则称光的单色性越好。设谱线中心处的波长为 λ , 则强度为 I_0 , 通常将强度下降到 $I_0/2$ 的两点之间的波长范围 $\Delta\lambda$ 当作谱线宽度, 它是衡量谱线单色性好坏的物理量, 如图 11.2 所示。普通单色光源, 如钠光灯、镉灯、汞灯等, 其谱线宽度的数量级为 $0.1 \sim 10^{-3}$ nm; 激光谱线宽度为 10^{-9} nm, 甚至更小。

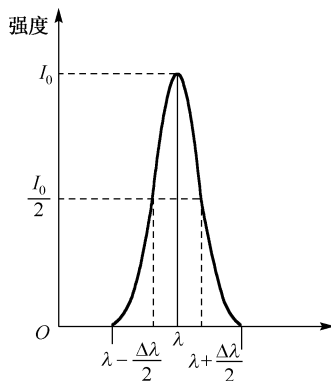


图 11.2 谱线及其宽度

11.1.2 光的相干性、相干光的获得

对于光波来说,振动的是电场强度 E 和磁场强度 H , 其中能引起人眼视觉和底片感光的是 E 矢量, 故通常把 E 矢量叫做光矢量。光波动过程的基本特征之一是干涉现象, 相位相同或相位差恒定的两个波源所发出的波叫相干波。把能产生相干叠加的两束光称为**相干光**。相干叠加必须满足振动频率相同、方向相同、相位差恒定的条件。亦即两相干波在相遇区域, 有些点的振动加强, 有些点的振动始终减弱或完全抵消, 即产生干涉现象。利用普通光源获得相干光, 其基本原理是把由光源上同一点发出的光, 通过某些装置将其分成两部分, 然后再使这两部分的光叠加起来。由于这两部分光实际上来自同一点光源, 所以, 它们满足相干条件而成为相干光。从普通光源获得相干光的方法有两种: 一种叫分波阵面法, 如杨氏实验和劳埃德镜实验; 另一种叫分振幅法, 如薄膜干涉实验等。

(1) 分波阵面法。如图 11.3 所示为杨氏双缝干涉装置。用很强的单色光照射狭缝 S , 可视为单色线光源。 S_1 、 S_2 为与 S 平行等距的狭缝。从 S_1 、 S_2 发出的光是从 S 的同一波阵面分出的两束光, 因而是相干光。在这两束相干光交叠的区域里可以看到干涉条纹。

(2) 分振幅法。如图 11.4 所示为薄膜干涉示意图。光束 1 入射至薄膜上表面, 分成两部分, 一部分由上表面反射形成光束 2, 另一部分折射进入薄膜, 在其下表面又被反射, 再通过上表面投射出来, 形成光束 3。反射光束 2、光束 3 是由光束 1 分出来的, 所以是相干光。从能量的角度来看, 光束 2 和光束 3 的能量是从光束 1 分出来的。由于波的能量与振幅有关, 因此可以形象地说振幅被“分割”了。这种产生相干光的方法叫做分振幅法。

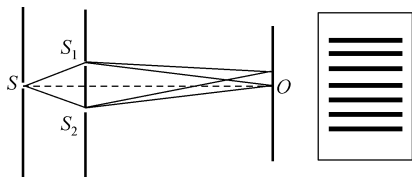


图 11.3 分波阵面法

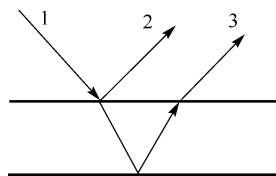


图 11.4 分振幅法

薄膜干涉在日常生活中较为常见, 例如, 肥皂泡、水面上的油膜、昆虫翅膀等在阳光照射下呈现的彩色花纹都是薄膜干涉的结果。因太阳光中含有各种波长的光波, 当太阳光照射油膜时, 经油膜上、下两表面反射的光形成相干光束, 有些地方红光得到加强, 有些地方绿光得到加强, 所以就可以看到油腻呈现彩色条纹。用单色光照射肥皂膜, 由于干涉也可以看到明暗相间的条纹。另外, 做全息照像实验时, 也用单频的激光光源, 由于从激光器窗口输出的光都具有相干性, 从而可以很方便地拍摄全息照片。图 11.5 所示是激光全息照像实验光路和全息照片图, 全息照像的基本原理是利用相干性好的物光束 O 和参考光束 R 的干涉和衍射, 将物光波的振幅和位相信息“冻结”在感光底片 H 上, 即以干涉条纹的形式记录下来的照片, 如图 11.5(b)所示。

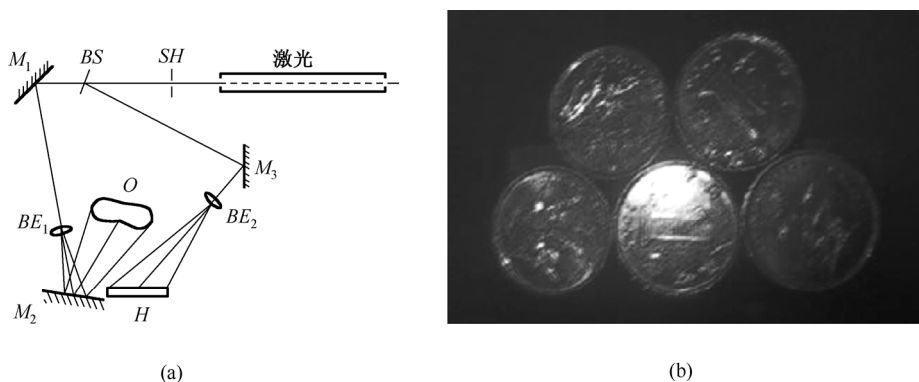


图 11.5 (a)Fresnel 全息图拍摄实验光路; (b)激光全息图照片

11.1.3 光程与光程差

1. 光程

设单色光的频率为 ν ，真空中光速为 c ，波长为 λ ，则有 $\lambda = \frac{c}{\nu}$ 。已经知道，光在折射率为 n 的介质中传播速度为 $v = \frac{c}{n}$ 。所以光在介质中传播时，其波长为

$$\lambda' = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{\nu n} = \frac{\lambda}{n} \quad (11-2)$$

式 (11-2) 表明，单色光在折射率为 n 的均匀介质中传播时，波长 λ' 为在真空中传播时波长 λ 的 $1/n$ 。因此，若假设光在介质中所经历的几何路程为 $l = v\Delta t = \frac{c}{n}\Delta t$ ，那么光在真空中通过的路程是 $x = c\Delta t$ ，有

$$x = c\Delta t = nl \quad (11-3)$$

由此可见，光波在介质中的路程 l 相当于在真空中的路程 nl 。式 (11.3) 中的 nl 表示：在某段时间内，光在真空中通过的路程等于光波在介质中所经历的几何路程 l 与介质的折射率 n 的乘积，光学中把 nl 称为光程。引入光程，实际上是把光在介质中通过的几何路程 l 折合成在同样一段时间内光在真空中的路程，以便统一地用光在真空中的波长 λ 来计算光的相位变化。

2. 光程差

设来自两个同相的相干点光源 S_1 、 S_2 的两束相干光 S_1P 和 S_2P ，分别在折射率为 n_1 和 n_2 的两种介质中传播，经过 r_1 和 r_2 的波程（几何路程）后，在 P 点相遇，如图 11.6 所示，则两者在 P 点的相位差为

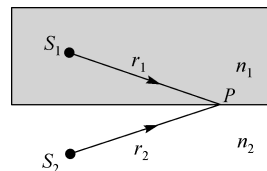


图 11.6 光程差的计算

$$\varphi_{12} = \left(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda_1} \right) - \left(\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda_2} \right) = 2\pi \frac{r_2}{\lambda_2} - 2\pi \frac{r_1}{\lambda_1} \quad (11-4a)$$

利用式 (11-2)，也可将式 (11-4a) 的相位差用光程差来表达，即

$$\varphi_{12} = \frac{2\pi}{\lambda} (n_2 r_2 - n_1 r_1) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \quad (11-4b)$$

式中， λ 为两束相干光在真空中的波长， $\delta = (n_2 r_2 - n_1 r_1)$ 是由于它们在两种介质中的传播路径（波程）不同所引起的光程差。

光程差与相位差 $\Delta\varphi = \varphi_{12}$ 的关系为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \quad (11-5)$$

所以，当光干涉加强（极大明条纹）时相位为

$$\Delta\varphi = \pm 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11-6)$$

当光的干涉极小（暗条纹）时相位为

$$\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11-7)$$

由式 (11-4b)，可将光的极大、极小干涉条件用光程差表示，即

$$\delta = (n_2 r_2 - n_1 r_1) = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{明条纹} \quad (11-8a)$$

$$\delta = (n_2 r_2 - n_1 r_1) = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{暗条纹} \quad (11-8b)$$

以上两式表明：两相干光叠加时光程差等于波长整数倍的各点，强度最大，呈现明条纹；光程差等于半波长奇数倍的各点，强度最小，呈现暗条纹。也就是说，干涉明、暗条纹位置的计算可归结为光程的计算。

11.2 杨氏双缝干涉 劳埃德镜实验

11.2.1 杨氏双缝实验

杨氏 (T.Young) 在 1801 年首先巧妙地用双缝干涉实验方法获得了光的干涉现象，并对光的波动性做出了说明。杨氏实验不仅是其他光的干涉装置的原形，而且在理论上也提供了许多重要的概念和启发。图 11.7(a) 所示是改进后的杨氏实验装置，在普通单色光源后面放一狭缝 S ，相当于一个线光源， S 后面又放有与 S 平行且等距的两平行狭缝 S_1 、 S_2 ，两缝间的距离很小，这时 S_1 、 S_2 构成一对相干光源，从 S_1 、 S_2 发出的光波在空间叠加，产生干涉现象。

现在对屏幕上的干涉条纹的位置做定量分析。设双缝的间距为 d ，缝宽一般为 $0.1 \sim$

1 mm; 双缝所在平面与接收屏 P 平行, 且到双狭缝平面的距离为 D (一般为 1~10 m), 接收屏上任一点 P 到 O 的距离为 x , 干涉条纹的观察范围 x 一般为 1~10 m, O 是 S_1 、 S_2 的中垂线与接收屏的交点, 如图 11.5(b)所示。

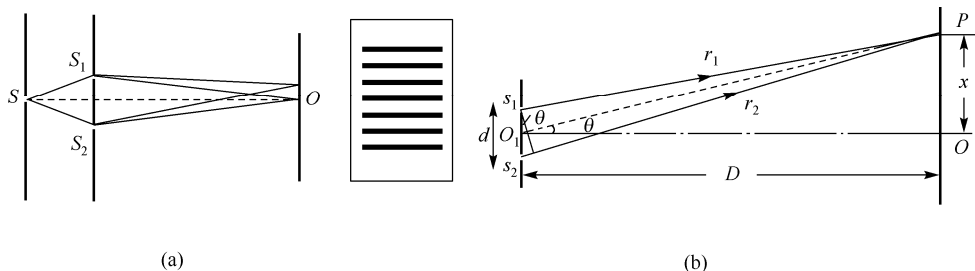


图 11.7 (a) 杨氏双缝干涉原理图; (b) 干涉条纹计算用图

在空气中 ($n \approx 1.0$), 设由 S_1 、 S_2 发出的光到接收屏上 P 点的距离为 r_1 、 r_2 , 因 $d \ll D$, $x \ll D$, 故它们的光程差近似为

$$\delta \approx r_2 - r_1 \approx d \sin \theta$$

式中 θ 是 P 点的角位置, 即 S_1 、 S_2 的中垂线 O_1O 与 O_1P 之间的夹角, 在杨氏双缝干涉中, θ 很小, $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$, 因而这两束光的光程差近似为

$$\delta \approx r_2 - r_1 \approx d \sin \theta \approx d \tan \theta = d \frac{x}{D}$$

由波动理论可知, 如果 P 点为明条纹 (干涉极大), 按干涉条件, 光程差应等于波长的整数倍, 即 $\delta = d \frac{x}{D} = \pm k \lambda$, 这时各级明纹中心离 O 点距离为

$$x = \pm k \frac{D \lambda}{d}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11-9a)$$

式中, $k=0$ 相应于在 O 点处的零级明纹 (也称中央明纹), 在该位置处 $\theta=0$ 、 $\delta=0$ 。在 O 点两侧, 与 $k=1, 2, \dots$ 对应的分别称为第一级, 第二级, ……明条纹, 它们对称地分布在中央明纹的两侧。

P 点出现暗条纹 (干涉极小) 的条件是 $\delta = \frac{xd}{D} = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}$, 即各级暗纹距中心 O 点的距离为

$$x = \pm (2k+1) \frac{D \lambda}{d} \frac{1}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11-9b)$$

$k=0, 1, 2, \dots$ 分别称为第一级、第二级、……暗纹。

干涉条纹具有以下特点:

- (1) 干涉条纹的形状是与双缝平行的一组明暗相间彼此等间距的直条纹, 上、下对称;
- (2) 两相邻明纹或暗纹的间距都是 $\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{D\lambda}{d}$, 所以干涉条纹是等距离分布的;
- (3) 图 11.8 所示为杨氏双缝干涉光强分布曲线。

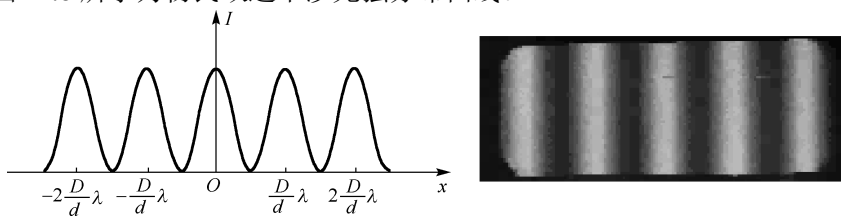


图 11.8 杨氏双缝干涉光强分布曲线

例 11-1 氦氖激光器发出波长为 632.8 nm 的单色光, 照射在距离为 $2.2 \times 10^{-4} \text{ m}$ 的双缝上。求离缝 1.8 m 处屏幕上观察到 20 条干涉明条纹之间的距离。

解 方法一: 根据明条纹位置公式求解。

在杨氏双缝实验中, 第 k 级明条纹位置为 $x = \pm k \frac{D\lambda}{d}$, 要求屏幕上观察到 20 条干涉条纹之间的距离, 可求第 0 级明条纹到第 19 级明条纹之间的距离。同样可以求第 1 级明条纹到第 20 级明条纹之间的距离 l 。

方法二: 根据明条纹间距公式求解。杨氏双缝干涉实验中条纹间距为 $\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$, 屏幕上 20 条明条纹之间的距离为 $19\Delta x$, 则有

$$l = 19 \cdot \Delta x = 19 \cdot \frac{D}{d} \lambda$$

11.2.2 劳埃德镜实验

劳埃德镜实验装置如图 11.9 所示, 图中 S_1 为狭缝光源, S_1 发出的光一部分直接照射到屏幕 E 上, 另一部分则经平面镜反射后照到屏幕上, 这两部分光是相干光, 在屏上两束光交叠的区域里可看到干涉条纹。在劳埃德镜实验中还发现, 如果将屏移动到与平面镜相

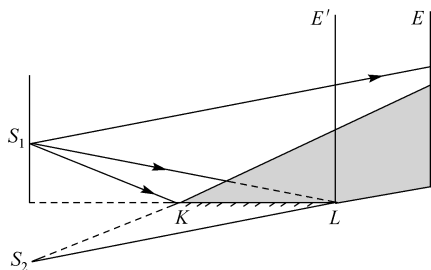


图 11.9 劳埃德镜实验装置

接触, 即图中 L 的位置, 在接触处两相干光的波程差为零, 但实验发现接触处不是明条纹, 而是暗条纹。这一事实说明在该实验中, 光线自空气射向平面镜并在平面镜上反射后有了量值为 π 的相位突变, 这也相当于相位差突变了半个波长 $\lambda/2$ 。光学中将光从光疏(折射率小的)介质射向光密(折射率大的)介质, 并在界面上反射时, 反射波发生相位 π 的突变的现象称为半波损失。因而, 在计算光

程时, 凡有半波损失的光波, 都要加上 $\lambda/2$ 的光程, 即相当于多走了半个波长。

劳埃德镜实验形成干涉条纹的原理可理解为 S_1 发出的同一波阵面的光线分为两部分, 经不同的空间路程传到屏幕上, 即分波阵面法。反射光可看作是由虚光源 S_2 发出的, S_2 为 S_1 对平面镜 L 所成的虚像, 由于反射光在被平面镜反射时有半波损失, 所以 S_1 、 S_2 是反相位的相干光源。于是关于杨氏双缝实验的分析也同样适用于劳埃德镜实验。图中与杨氏实验对应的 S_1 与 S_2 之间的距离相当于杨氏实验中的 d , S_1 、 S_2 与屏之间的距离相当于 D , 屏幕上明、暗条纹位置与杨氏实验相反。

11.2.3 反射光的相位突变和附加光程差

在讨论劳埃德镜实验时已经指出, 光从光疏 (折射率小的) 介质射向光密 (折射率大的) 介质, 并在界面上反射时, 反射波发生相位 π 的突变现象, 即有半波损失。因而在讨论两束光在界面反射时, 就要考虑两束反射光是否存在相位突变引起的额外的相位差。理论和实验表明: 如果两束光都是从光疏到光密界面反射 (即 $n_1 < n < n_2$ 的情况) 或都是从光密到光疏界面反射 ($n_1 > n > n_2$ 的情况) 的, 则两束反射光之间无附加的相位差。如果一束光从光疏到光密界面反射, 而另一束从光密到光疏界面反射 ($n_1 < n > n_2$ 或 $n_1 > n < n_2$ 的情况), 则两束反射光之间有附加的相位差 π , 或者说有附加光程差 $\lambda/2$ 。对于折射光, 则任何情况下都不会有相位突变。

11.3.4 透镜不引起附加光程差

对于平行光束通过透镜后, 将会聚于一焦平面上形成一个亮点, 如图 11.10(a)、(b) 所示。这时由于平行光束波阵面上各点 (A 、 B 、 C 、 D 、 E) 的相位相同, 而到达焦平面后相位仍然相同, 因而干涉加强。可见, 光线从这些点到 F 点或 F' 点的几何路程并不相等, 但是它们的光程却是相等的。从上述说明可知, 使用透镜只能改变光波的传播情况, 但对物、像间各光线不会引起附加的光程差。

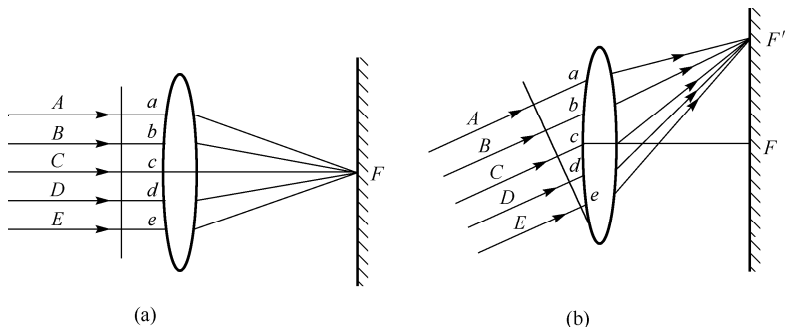


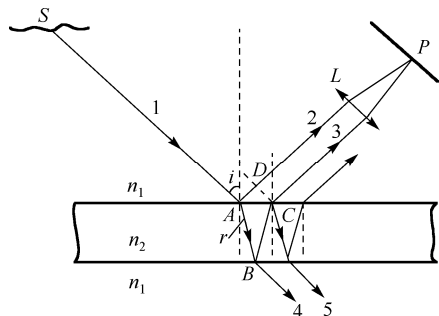
图 11.10 (a) 平行光垂直通过透镜; (b) 平行光斜入射通过透镜

11.3 薄膜干涉 光学干涉测薄膜厚度

11.3.1 薄膜干涉

前面已介绍, 薄膜干涉在日常生活中较为常见, 如肥皂泡、水面上的油膜、昆虫翅膀等在阳光照射下呈现的彩色花纹就是薄膜干涉的结果。薄膜干涉是一种光波经两表面反射后相互叠加所形成的干涉现象。对薄膜干涉现象的详细研究较为复杂, 但在实际中, 较为简单而应用较多的是厚度不均匀薄膜表面上的等厚干涉条纹和厚度均匀的薄膜在无穷远处形成的等倾干涉条纹。

如图 11.11 所示, 折射率为 n_2 、厚度为 d 的均匀薄膜处于折射率为 $n_1 (< n_2)$ 的介质中, 设单色光源 S 发出的一条光线 1 以入射角 i 入射到薄膜表面 A 点后, 一部分被反射形成光线 2, 另一部分折射进入薄膜, 并在下表面上的 B 点反射, 然后在 C 点折射形成光线 3。由几何关系知, 光线 2 和光线 3 是两条平行光线, 经透镜 L 后会聚于 P 点, 因为光线 2



和光线 3 是由同一条光线分出来的, 所以它们是相干光, 在 P 点会产生干涉现象, 光线 2 和光线 3 的能量是从同一条光线 1 分出来的, 由于波的能量和振幅有关, 所以这种产生相干光的方法叫分振幅法, 干涉加强或减弱取决于它们的光程差, 由于透镜不产生附加光程差, 所以光线 3 和光线 2 的光程差为

$$\delta = n_2 (\overline{AB} + \overline{BC}) - n_1 \overline{AD} + \frac{\lambda}{2}$$

图 11.11 薄膜的干涉

式中, $\lambda/2$ 是由于光在上表面由光疏介质向光密介质入射, 反射光产生半波损失而引起的光程差。

由几何关系知

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{d}{\cos r}, \quad \overline{AD} = \overline{AC} \sin i = 2d \tan r \sin i$$

将以上两式代入光程差公式得

$$\delta = \frac{2n_2 d}{\cos r} - 2n_1 d \tan r \sin i + \frac{\lambda}{2}$$

由于折射定律 $n_1 \sin i = n_2 \sin r$, 所以有

$$\delta = 2n_2 d \cos r + \frac{\lambda}{2} \quad (11-10a)$$

或

$$\delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} \quad (11-10b)$$

干涉明条纹的条件是

$$\delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11-11)$$

干涉暗条纹的条件是

$$\delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11-12)$$

扩展光源上任意点发出的入射角 i 相同的光线经薄膜上、下表面反射后产生的相干光的光程差相同，形成干涉条纹。具有相同入射角的光线，其反射光的干涉点构成了同一级条纹，不同入射角的光线，其反射光的干涉点构成不同的条纹，这种干涉称为等倾干涉，产生的条纹称为等倾条纹。

如图 11.11 所示，透射光线 4 和 5 也满足相干条件，产生干涉现象，两透射光之间没有反射而附加的光程差（半波损失），因此当反射光的干涉相互加强时，透射光的干涉相互减弱，符合能量守恒定律。

11.3.2 增透膜与高反射膜

对于所有的光学仪器，都可能存在光能损失的情况，为了减少入射光能在光学设备上因反射而引起的损失，常在镜面上镀一层厚度均匀的透明薄膜（常用氟化镁 MgF_2 ，它的折射率 $n=1.38$ ），它的折射率介于玻璃与空气之间，利用薄膜的干涉使反射光减到最小，这样的薄膜称为增透膜。增透膜原理如图 11.12 所示，设膜的厚度为 e ，光从空气中垂直（放大了入射角 i ）入射到膜上，这时光在两表面的光程差为 $2n_2e$ ，由于折射率 $n_1 < n_2 < n_3$ ，所以反射光在膜的上、下表面都有相位 π 的突变，因而没有附加的相位差。两反射光干涉相消时满足的关系为

$$2n_2e = (k + \frac{1}{2})\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

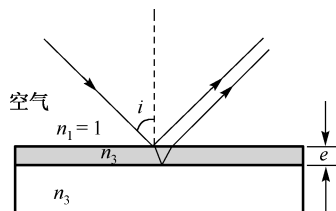


图 11.12 增透膜

即由 $k=0$ 时，可计算出波长为 λ 的单色光在膜的上、下表面反射后因干涉而相消时的最小厚度， $e = \lambda / 4n_2$ 。根据能量守恒关系，由于反射光相消，因而透射光增强。于是这种单色光几乎完全不发生反射而是透射过薄膜。例如，在现代光学仪器的透镜上，就要镀上一层这样的增透薄膜。单层增透膜只能使某种特定波长的光尽量减小反射，对于相近波长的其他光也有不同程度的减弱，但不是减到最弱。

在镀膜工艺中，控制膜的厚度 e ，使 $ne = 1/4\lambda$ ，这样就可以控制某个特定波长的光尽量减小反射，通常把 ne 称为薄膜的光学厚度。大多数照相机的镜头上就镀有人眼最敏感的

黄绿光(波长为 $\lambda = 500 \text{ nm}$) 增透薄膜, 在白光下观看此薄膜的反射光, 黄绿色最弱, 红、蓝光相对强一些, 因而一般照相机镜头呈现蓝紫色。

对于有些光学器件, 须要减少其透射, 以增加反射光的强度。当光程差 $2n_2e = \lambda$, 即 $e = \lambda / 2n_2$ 时, 波长为 λ 的单色光在膜的两个表面上的反射光因干涉而加强, 从而出现均匀的一片亮。用这种方法可制成反射本领高达 99% 的反射表面。如果把低折射率的膜改为同样光学厚度的高折射率的膜, 则薄膜上、下表面的两反射光将干涉加强, 这就使反射光增强了, 而透射光减弱, 这样的膜就是增反膜, 或**高反射膜**。

例 11-2 如图 11.13 所示, 在一块玻璃基片上交替镀上不同材料的多层介质膜, 组成一个反射式滤波片, 使它能对 632.8 nm 红光的反射率达到 99% 以上, 已知高折射率介质为 ZnS , 折射率为 $n_1 = 2.35$, 低折射率介质为 MgF_2 , 折射率为 $n_2 = 1.38$ 。试求: 每一层的最小厚度(设光线垂直入射)。

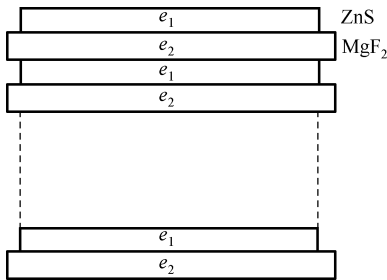


图 11.13 例 11-2 图

解 反射式滤色片是让反射光在膜的上表面干涉加强。第一层为 ZnS 膜, 厚度为 e_1 , 第二层为 MgF_2 , 厚度为 e_2 , 第三层为 ZnS 膜, 厚度为 e_1 , 第四层为 MgF_2 , 厚度为 e_2 。膜的层数越多, 总反射率越高, 但由于光的吸收, 实际层数不能过多, 一般最佳为 15 或

为 17 层。入射光在第一层上、下表面反射形成两束相干光, 考虑到存在半波损失和垂直入射条件, 所以光程差为

$$\delta = 2n_1e_1 + \frac{\lambda}{2}$$

根据干涉加强条件 $\delta = 2n_1e_1 + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$, 要求镀的厚度要最小, 即 $k=1$, 故有

$$2n_1e_1 + \frac{\lambda}{2} = \lambda$$

所以

$$e_1 = \frac{\lambda}{4n_1} = \frac{632.8}{4 \times 2.35} \text{ nm} = 67.3 \text{ nm}$$

同理, 入射光在第二层上、下表面反射形成的两束相干光, 其光程差为

$$\delta = 2n_2e_2 + \frac{\lambda}{2} = \lambda$$

所以

$$e_2 = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{632.8}{4 \times 1.38} \text{ nm} = 114.6 \text{ nm}$$

依此类推, 各层的厚度, 即为上面所求之值。

11.3.3 劈尖干涉 牛顿环

前面研究了平行光在厚度均匀的薄膜上的干涉，如增透膜与高反射膜就属于这类情况，那么在厚薄不均匀的薄膜上所产生的干涉现象又如何呢？在实验中常见的厚度有规律变化的干涉薄膜有劈尖膜和牛顿环，下面介绍这两种干涉。

1. 劈尖干涉

图 11.14 所示为一个两片叠加在一起的平板玻璃，其一端的棱边相接触，另一端被一直径为 D 的细丝隔开，故在上、下玻璃板之间形成一空气薄层，这叫做空气劈尖。在空气与玻璃之间还可充入透明介质（如水、油等）形成劈尖，当然也可用介质薄片或膜做劈尖形干涉器件。像这类劈尖，当平行光垂直射向劈尖（入射角 $i=0$ ）时，自空气劈尖上、下两面反射的光相互干涉，则在劈尖表面就可观察到明暗相间的干涉条纹。

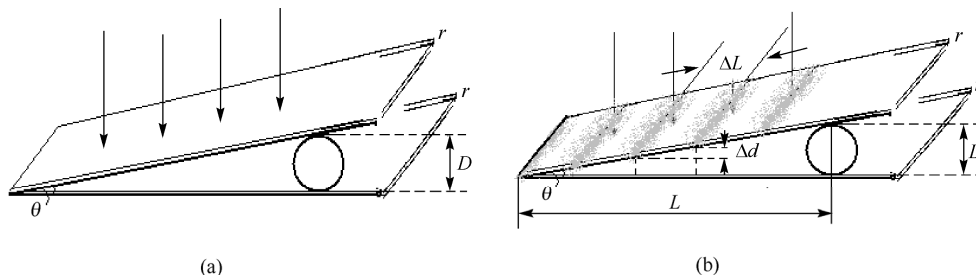


图 11.14 (a)劈尖装置；(b)劈尖干涉条纹的形成

下面定量讨论劈尖形成干涉条纹的原理。图 11.14(b)中， D 为细丝的直径， L 为玻璃的长度， θ 为两玻璃片间的夹角。由于 θ 实际很小，所以在劈尖上表面反射的光线和在劈尖下表面反射的光线都近似看作是垂直于劈尖表面的，它们在劈尖表面相遇并相干叠加。由于劈尖层空气的折射率 n 比玻璃的折射率 n_1 小，所以光在劈尖下表面反射时因有相伴跃变而产生附加光程差 $\lambda/2$ 。这样，由式 (11-11)，可测得劈尖厚度为 d 处上、下表面反射的两相干光的总光程差（当 $i=0$ 时）为

$$\delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = 2dn_2 + \frac{\lambda}{2}$$

式中 d 为劈尖上、下表面间的距离。劈尖反射光干涉极大（明纹中心）的条件为

$$2dn_2 + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad k=1,2,3,\dots \quad (11-13)$$

产生干涉极小（暗纹中心）的条件为

$$2dn_2 + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad k=0,1,2,\dots \quad (11-14)$$

式中 k 是干涉条纹的级次。从式 (11-13)、式 (11-13) 可见, 每一级明纹或暗纹对应一定的膜厚, 凡劈尖内厚度 d 相等的地方均满足相同的干涉条件。因此, 劈尖的干涉条纹是一系列平行于劈尖棱边的明暗相间的直条纹, 如图 11.13(b) 所示。也把这种与薄膜上等厚线相对应的干涉现象, 叫做等厚干涉。等厚干涉形成的条纹叫做等厚干涉条纹。

对于 $n \approx 1$ 的空气劈尖, 棱边处 $d = 0$, $\delta = \lambda / 2$, 故在棱边处形成暗条纹, 这与各实验观察结果一致。根据上述讨论, 不难求出相邻两条明纹或暗纹在表面上的距离 ΔL , 由图 11.13(b) 可知

$$\Delta L = \frac{\Delta d}{\sin \theta}$$

为两相邻明纹或暗纹处劈尖的厚度差。设第 k 级明纹处劈尖的厚度为 d_k , 第 $k+1$ 级明纹处的劈尖厚度为 d_{k+1} , 由式 (11-13) 或式 (11-14) 很容易得到

$$\Delta d = d_{k+1} - d_k = \frac{\lambda}{2n} \quad (11-15)$$

代入 ΔL 得, $\Delta L = \frac{\lambda}{2n \sin \theta}$ 。通常由于 θ 很小, 所以 $\sin \theta \approx \theta$, 故

$$\Delta L = \frac{\lambda}{2n\theta} \quad \text{或} \quad \theta = \frac{\lambda}{2n\Delta L} \quad (11-16)$$

由此可求出细丝直径 D , 将 $\tan \theta \approx \theta \approx \frac{D}{L}$ 代入式 (11-16) 得

$$D = \frac{\lambda}{2n\Delta L} L \quad (11-17)$$

由此可见, 若已知劈尖长度 L , 光在真空中的波长 λ 和劈尖的折射率 n , 并测出相邻明纹或暗纹间的距离 ΔL , 就很容易计算出细丝的直径 D 。另外, 利用劈尖的特性, 还可以检查精密加工工件的平整程度, 把标准玻璃块放在待测工件上, 待测工件不平整, 则干涉条纹将不是平行直线, 而是不均匀的不规则曲线。

2. 牛顿环

在一块光滑平整的光学玻璃片 B 上, 放置一曲率半径 R 很大的平凸透镜 A , 在 A 、 B 之间形成一劈尖空气薄层。当平行光束垂直地射向平凸透镜时, 可以观察到在透镜表面出现一组干涉条纹, 这些干涉条纹是以接触点 O 为中心的同心圆环, 称为牛顿环, 图 11.15(a) 所示为牛顿环装置示意图。

当垂直入射的单色平行光透过平凸透镜后, 在空气 (空气的折射率 $n \approx 1$) 的上、下表面发生反射形成两束向上的相干光, 这两束相干光在平凸透镜下表面相遇而发生干涉, 这两束光的光程差为

$$\delta = 2d + \frac{\lambda}{2}$$

其中, d 是与 O 相距 r 处的空气层厚度, $\lambda/2$ 是光在下表面反射时的半波损失, 由于光程差由空气层的厚度决定, 所以由干涉产生的牛顿环也是一种等厚干涉条纹。空气层的等厚线是以 O 为中心的同心圆, 所以干涉条纹也是明暗相间的圆环。若牛顿环两面之间充入折射率为 n 的介质, 相干光线的光程差要考虑介质的折射率和半波损失。

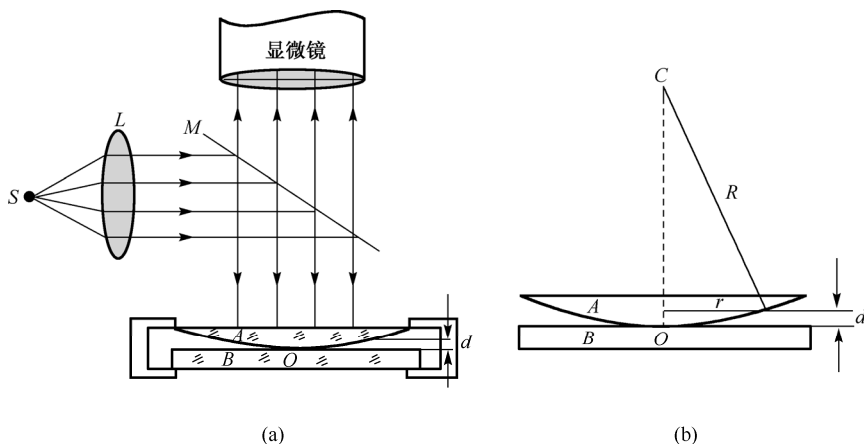


图 11.15 (a)牛顿环装置示意图; (b)牛顿环的计算示意图

形成明环的条件:

$$\delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

形成暗环的条件:

$$\delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

牛顿环中心为暗环, 因为在中心处 $d=0$, 且存在半波损失, 两相干光光程差为 $\lambda/2$, 故形成暗环, 这一级的级次最低。离开中心越远, 光程差越大, 圆条纹间距越小, 即条纹越密。其透射光也有干涉, 且形成干涉条纹。由于没有反射面附加的光程差, 所以它们和反射光干涉明暗条纹互补 (注意和等倾干涉条纹的异同)。

在实际观察中, 常测得牛顿环的半径 r , 可参照图 11.15(b)具体求得。它与 d 和凸球面的半径 R 的关系:

$$r^2 = R^2 - (R-d)^2 = 2Rd - d^2$$

因为 $R \gg d$, 略去二阶小量 d^2 , 并微分得

$$d = \frac{r^2}{2R}, \quad \Delta d = \frac{r(\Delta r)}{R}$$

代入明环公式得明环中心位置为

$$r = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}}, \quad k=1,2,3,\dots \quad (11-18)$$

代入暗环公式得暗环中心位置

$$r = \sqrt{kR\lambda}, \quad k=0,1,2,\dots \quad (11-19)$$

由式(11-18)、式(11-19)可知,牛顿环的半径 r 与级次 \sqrt{k} 成正比,因而条纹间距是不相等的。离开中心越远,圆条纹间距越小,即条纹越密。

若牛顿环两面间充满折射率为 n 的介质,则这时只需将式(11-18)、式(11-19)中的 λ 替换为 λ/n ,读者可以自己讨论导出公式。

例 11-3 已知用紫光照射,借助于低倍测量显微镜测得由中心往外数第 k 级明环的半径为 r_k , k 级往上数第16个明环的半径为 r_{k+16} ,平凸透镜的曲率半径 $R=2.50$ m,求紫光的波长?

解 根据明环半径公式 $r_k = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}}$, 则为

$$r_{k+16} = \sqrt{\frac{[2 \times (k+16) - 1]R\lambda}{2}},$$

由上述两式可得

$$\begin{aligned} r_{k+16}^2 - r_k^2 &= 16R\lambda \\ \lambda &= \frac{(5.0 \times 10^{-2})^2 - (3.0 \times 10^{-2})^2}{16 \times 2.50} = 4.0 \times 10^{-7} \text{ m} \end{aligned}$$

因此,紫光以其高精度显示光测量的优越性。

*11.3.4 光学干涉测薄膜厚度

(1) 测量原理

真空镀膜所获得的薄膜厚度通常为几纳米到几百纳米,如果膜厚在几十纳米以上,则可用光学干涉法测量厚度。

图 11.16 所示为 6JA 型光学干涉显微镜,它是干涉仪和显微镜的组合。

首先将薄膜制备成台阶状,台阶的一侧为薄膜,另一侧为裸露的基片表面,如图 11.17(a)所示。如果以此工件代替反射镜 M_1 ,那么从薄膜反射的光束 A 与从基片反射的光束 B 两部分的光程便各不相同,各自与光束 C 的光程差也就不同,于是导致两条干涉条纹产生相对偏移,如图 11.17(b)所示。条纹偏移的间格数 $N = S_{\text{移}} / S_{\text{间}}$,于是,台阶(即薄膜厚度)为

$$d = N \cdot \frac{\lambda}{2} = (S_{\text{移}} / S_{\text{间}}) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (11-20)$$

式中 λ 为光源的波长,当采用白光光源时,取 $\lambda = 0.54 \mu\text{m}$ 。

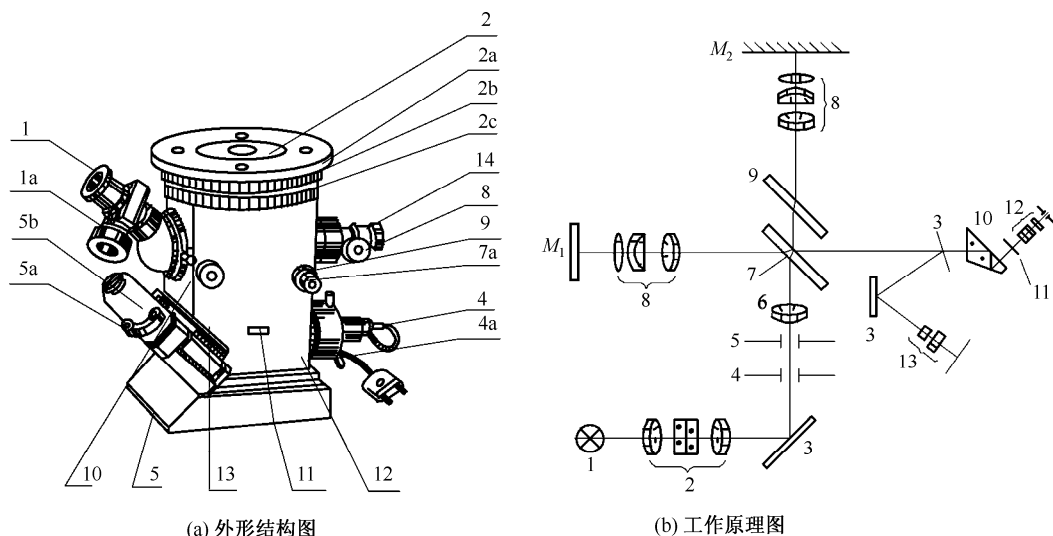


图 11.16 6JA 型光学干涉显微镜

1-光源；2-聚光镜；3-反射镜；4-孔径光阑；5-视场光阑；6-照明物镜；7-分光板；8-物镜；9-补偿板；
10-转向棱镜；11-分划板；12-目镜；13-摄物镜

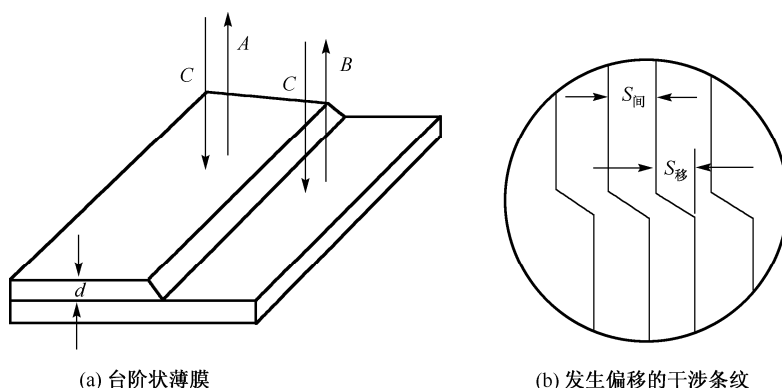


图 11.17 台阶状反射面形成光束干涉条纹的偏移

(2) 干涉显微镜测量方法

① 调出干涉条纹。将基片有薄膜的一侧面朝下放置在显微镜工作台上，调节升降手轮使得能看清物体表面，然后细心调节手轮 14 和 8 直至能见到清晰的彩色干涉条纹，其中有两条黑色的为零级暗条纹，其间的距离可作为条纹间距 S ；

② 调节升降手轮使条纹位置居中，调节工作台方位，并通过手轮 9 和 7a 调节两束相干光夹角和取向，使干涉条纹与台阶互相垂直；

③ 调节测微目镜的方位，使十字丝线之一与条纹平行，即可通过手动鼓轮测量读数，图 11.18 所示为 Fe/Cu 薄膜厚度测量结果图。

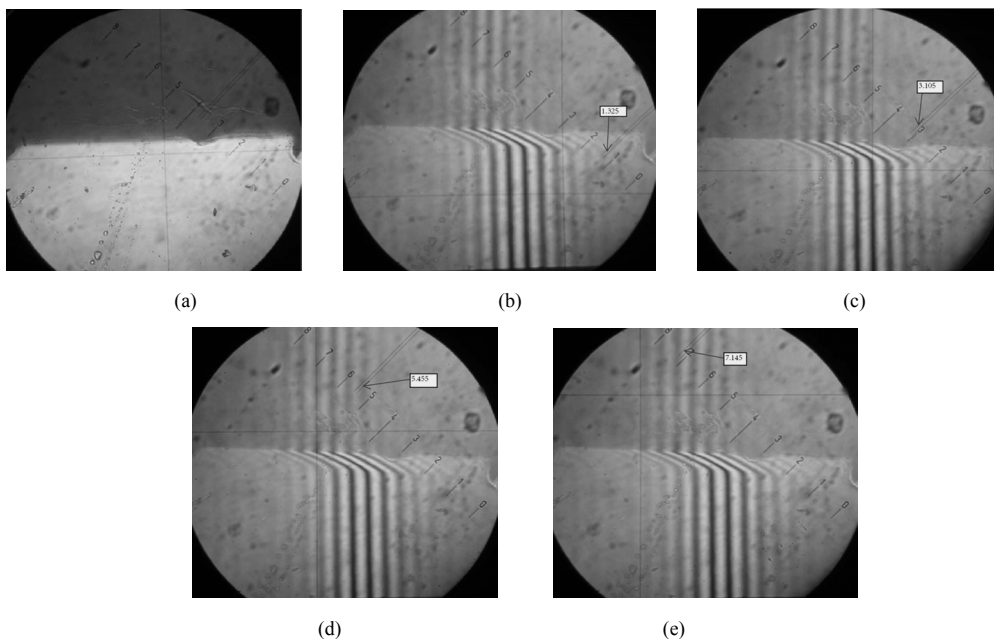


图 11.18 Fe/Cu 薄膜厚度的测量结果图

11.4 光的衍射现象和惠更斯-菲涅耳原理

11.4.1 光的衍射现象

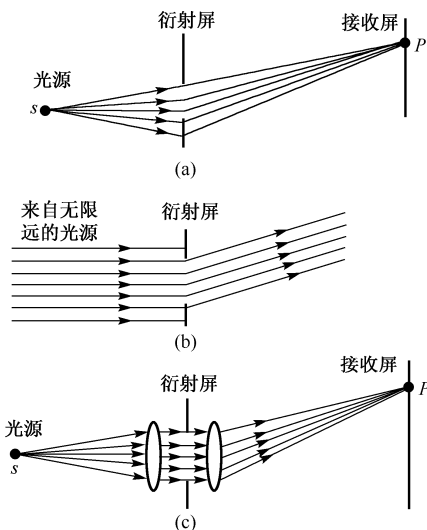


图 11.19 菲涅耳衍射与夫琅禾费衍射示意图

衍射和干涉一样也是波动的重要特征之一。把波遇到障碍物时光偏离直线传播的现象叫做衍射。在日常生活中,机械波遇到障碍物时,将偏离直线传播,发生衍射现象。但是光的衍射现象不易为人们所察觉,这是由于光的波长短,且普通光源不是相干光源,不易产生明显的衍射现象,主要表现为光的直线传播性质。

11.4.2 惠更斯-菲涅耳原理

菲涅耳衍射与夫琅禾费衍射: 观察衍射现象的实验一般由光源、衍射屏和接收屏三部分组成。根据它们相互间距离的不同情况,通常将衍射分为两类:一类是衍射屏离光源或接收屏的距离为有限远时的衍射,称为菲涅耳衍射(A.J Fresnel),如图 11.19(a)

所示；当把光源和屏都移到无限远时，这时光到达衍射孔（或障碍物）和到达屏幕时的波阵面都是平面，也就是照射到衍射屏上的入射光和离开衍射屏的衍射光都是平行光的衍射，称为夫琅禾费（J.Fraunhofer）衍射，如图 11.19(b)所示。在实验室中，夫琅禾费衍射可用两个会聚透镜来实现，常把光源放在一个透镜的焦点上，把屏幕放在另一个透镜的焦平面上，如图 11.19(c)所示，这样到达孔衍射屏的光和衍射光都满足夫琅禾费衍射条件，夫琅禾费衍射在理论和实际应用中都十分重要，而且这类衍射的分析与计算都较简单。因此，本书只讨论夫琅禾费衍射。

惠更斯-菲涅耳衍射原理：菲涅耳吸收了惠更斯原理“次波”的思想，在杨氏双缝干涉现象的启发下，加入“次波相干叠加”的概念，将它发展成为更完善的惠更斯-菲涅耳原理。

如图 11.20 所示， S 为从 O 点发出的球面波在某时刻到达的波阵面， P 为波场中的某个点，把 S 面分割成无穷多个小面元 dS ，把每个 dS 看作发射次波的波源，从所有面元发出的次波在 P 点相遇，由各面元 dS 到 P 点的光程是不同的，从而在 P 点引起的振动位相不同。 P 点的总振动就是这些次波在这里相干叠加的结果， r 与 dS 的法线之间的夹角 θ 越大，在 r 方向上所引起的子波振幅越小。菲涅耳认为，在 $\theta \geq \pi/2$ 时，振幅为零，因而强度也是零，子波不能向后传播。

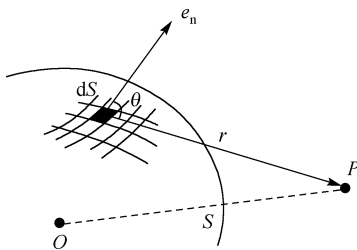


图 11.19 惠更斯-菲涅耳衍射原理说明用图

惠更斯-菲涅耳衍射原理：给定波阵面 S 上每一面元 dS 发出的子波，在波阵面前方某点 P 所引起的光振动的振幅的大小与面积 dS 成正比，与面元到 P 点的距离 r 成反比，并且随面元法线与 r 间的夹角 θ 的增大而减小， P 点处的光强为整个波阵面上所有面元发出的子波在 P 点引起的光振动的总和。

应用惠更斯-菲涅耳衍射原理，原则上可解决一般的衍射问题，但求 P 点光强总和的积分计算是相当复杂的。

11.5 夫琅禾费衍射

11.5.1 单缝夫琅禾费衍射

如图 11.21(a)所示，光源 S 位于透镜 L' 的焦点上，射出一束平行光，照在衍射屏上，衍射屏开口处的波阵面（平行光的波阵面为平面）向各个方向发出次波，波射线称为衍射光线，衍射光线与单缝平面法线间的夹角为衍射角 θ 。在各次波中，传播方向彼此相同的衍射线经透镜 L 会聚到焦平面上的 P 点。如图 11.21(b)所示，作一些平行于 BC 的辅助平面（ BC 与衍射光线垂直），使两相邻平面之间的间距等于入射光的半波长 $\lambda/2$ ，辅助平面在波阵面上分出的等面积的条带称为半波带。将波阵面分割成许多等面积的波带，并分析衍射图样的方法叫半波带法。

由图 11.21 所示的单缝可知, 单缝两边缘处衍射光线之间的光程差 AC 决定半波带的个数。而

$$AC = a \sin \theta$$

其中 a 是单缝的宽度, 衍射角不同, 单缝处波阵面分出的半波带的个数不同。

各个半波带到 P 点的距离近似相等, 因而各个带发出的子波在 P 点的振幅近似相等。因透镜不产生附加光程差, 相邻两波带的对应点到 P 点的光程差为 $\lambda/2$, 在 P 点的相差为 π , 因此, 相邻两波带发出的光在 P 点的振动合成互相抵消。

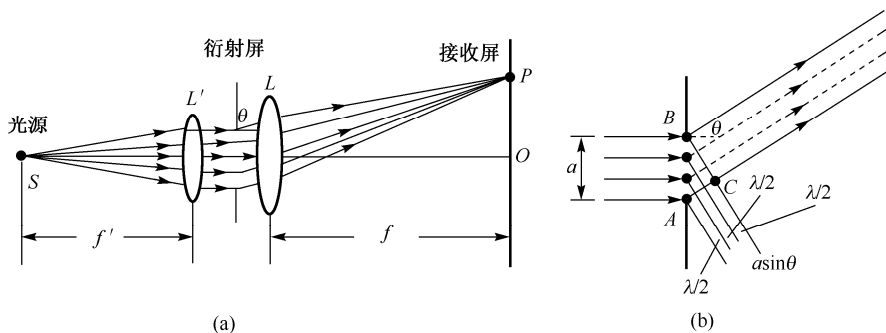


图 11.21 (a)夫琅禾费单缝衍射光路图; (b)半波带法

当 AC 等于半波长的偶数倍时, 单缝处波阵面可分为偶数个半波带, 由于相邻的半波带发出的光都分别在 P 点相互抵消, 所以合振幅为零, P 点应是暗条纹的中心, 当 θ 满足

$$a \sin \theta = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11-21)$$

时, P 点为暗条纹中心, 对应于 $k = 1, 2, 3, \dots$ 分别叫做第一级暗条纹、第二级暗条纹……正、负号表示条纹分布于中央明纹的两侧。

当 AC 等于半波长的奇数倍时, 单缝处波阵面可分为奇数个半波带, 则相邻的半波带发出的光分别在 P 点相互抵消后, 还剩一个半波带发出的光到达 P 点合成, P 点应近似为明条纹的中心, 而且 θ 角越大, 半波带面积越小, 明条纹光强越弱, k 级明条纹满足

$$a \sin \theta = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11-22)$$

当 $\theta = 0$ 时, 各衍射光光程差为零, 通过透镜后会聚在透镜的焦平面上, 这就是中央明纹(或零级明纹)中心的位置, 该处光强最大, 对于任意其他的衍射角 θ , AB 一般不能恰巧分成整数个半波带, 此时, 衍射光束形成介于最明和最暗之间的中间区域。

单缝衍射光强分布如图 11.22 所示。单缝衍射图样中各极大处的光强是不相同的, 中央明纹光强最大, 其他明纹光强迅速减弱。

两个第一级暗纹中心间的距离为中央明纹区域, 当式(11-21)中的 $k = 1$ 时, 即

$$-\frac{\lambda}{a} < \sin \theta < \frac{\lambda}{a} \quad (11-23)$$

的范围为中央明纹,

考虑到一般情况中的 θ 角较小, 所以中央明纹的半角宽度为

$$\theta \approx \sin \theta = \frac{\lambda}{a} \quad (11-24)$$

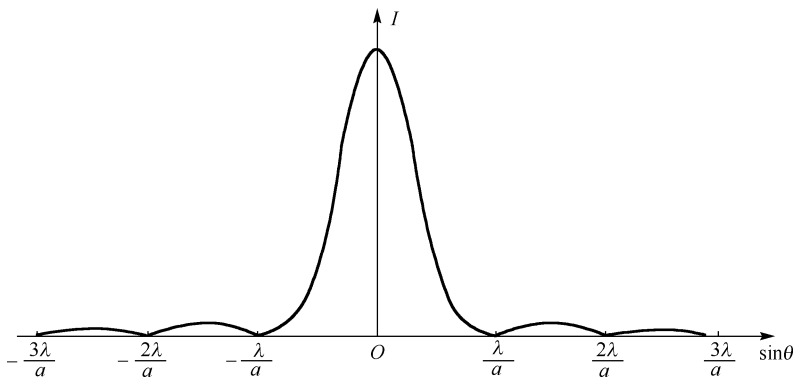


图 11.22 单缝衍射的光强分布

在 θ 角较小的条件下, 中央明纹的宽度是其他明条纹宽度的两倍, 即中央明纹的半角宽度等于其他明纹的角宽度, 中央明纹又亮又宽。

透镜 L 一般均紧靠单缝放置, 以 f 表示透镜 L 的焦距, 则在观察屏上中央明纹的半线宽度等于其他明纹宽度

$$\Delta x = f \tan \theta \approx f \frac{\lambda}{a} \quad (11-25)$$

条纹线宽度近似等于条纹角宽度与透镜焦距的乘积。在单缝衍射中, 缝越窄, 明纹宽度大, 衍射越显著; 缝越宽, 明纹宽度小, 衍射越不明显。当缝宽 $a \gg \lambda$ 时, 各级衍射条纹向中央靠拢, 密集得以至于无法分辨, 只显示出单一的明条纹, 实际上这明条纹就是线光源 S 通过透镜的平行光束, 是光的直线传播现象。几何光学是以光的直线传播为基础的理论, 几何光学是波动光学在 $\lambda/a \rightarrow 0$ 时的极限情形。

根据半波带法的光程差分析, 当光源 S 垂直于主光轴上下平移时, 接收屏上的衍射条纹反向移动; 当光源 S 不动, 将单缝垂直于主光轴上下移动, 接收屏上的条纹不发生移动。

双缝的干涉利用了波的叠加规律, 分析单缝衍射时, 也利用了波的叠加规律。干涉和衍射有什么区别呢? 从本质上讲, 干涉和衍射都是光波相干叠加的表现, 并无区别, 由于历史的原因, 由有限数目的相干波源的叠加所产生的振幅和强度图样, 通常称为干涉图样。由相干波源的“连续”分布的贡献所产生的振幅和强度图样通常称为衍射图样。干涉和衍

射出处于同一现象中,例如,双缝干涉的图样实际上是两个缝发出的光束的干涉和每个缝自身发出的光的衍射的综合效果。

11.5.2 圆孔夫琅禾费衍射 光学仪器的分辨率

将单缝衍射屏换为圆孔衍射屏,将在接收屏上得到夫琅禾费圆孔衍射图样,如图 11.23 所示。夫琅禾费圆孔衍射有助于分析光学成像系统的成像质量。当单色平行光垂直照射小圆孔时,在透镜 L 的焦平面处的屏幕 P 上将出现中央亮圆斑,周围为明、暗交替的环形衍射图样。中央光斑较亮,称为艾里(Airy)斑,艾里斑也是圆孔的零级衍射斑。其中心是几何光学像中心。衍射光角分布的弥散程度可用艾里斑的半角宽度表示,对于直径为 D 的圆孔的夫琅禾费衍射,艾里斑的半角宽度 θ 为衍射斑中心到第一级极小的角距离,第一级极小的角位置与波长、圆孔直径的关系为

$$2 \sin \theta \approx \frac{d}{f} = 2.44 \frac{\lambda}{D} \quad (11-26)$$

式中的系数 2.44 为反映几何形状不同的因数。当 θ 很小时,艾里斑的半角宽度为

$$\delta\theta \approx \sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (11-27a)$$

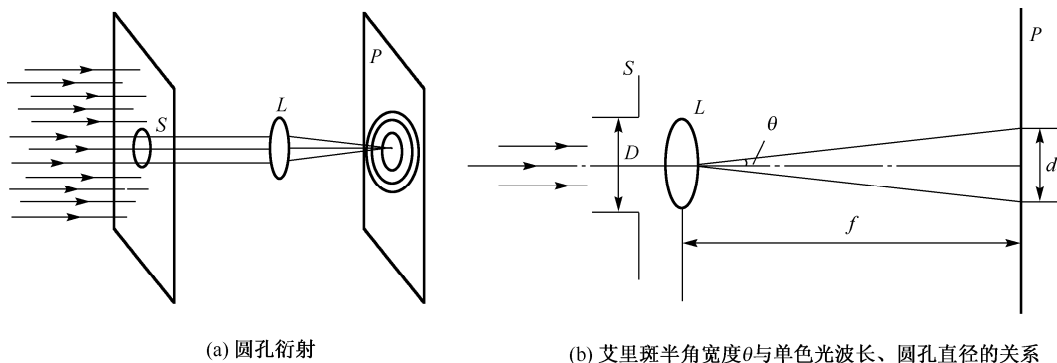


图 11.23 圆孔衍射原理图

最小分辨角(瑞利判据): 当一个艾里斑的中心刚好落在另一个艾里斑的边缘时,就认为两个像刚好能够分辨,把这时的艾里斑的半角宽度称为**最小分辨角**。即

$$\delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

按此规定可求出两物点的距离作为光学仪器能分辨的两物点的最小距离。以圆孔形物镜为例,恰能分辨两个点光源 S_1 和 S_2 的两衍射图样中心之间的距离,就应等于艾里斑的半径,此时, S_1 和 S_2 对仪器透镜光心的张角(如图 11.24 所示)为

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (11-27b)$$

式中, λ 是波长, D 是透光孔径。可见, 对于无限远物点成像的圆孔光学系统, 其孔径越大, 则所能分辨开的两物点的角距离越小, 即分辨本领越大; 并且所用的光的波长越短, 分辨本领也越大。

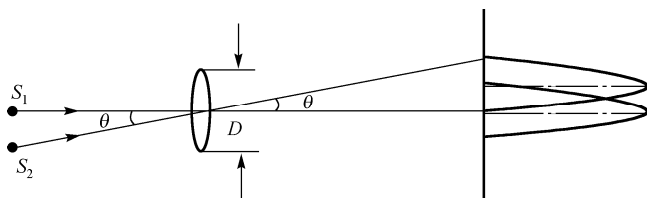


图 11.24 最小分辨角

在光学中, 常将光学仪器的最小分辨角的倒数称为仪器的分辨率, 即 $1/\theta$ 。

例 11-4 水银灯发出的波长为 546 nm 的绿色平行光垂直入射于宽 0.437 mm 的单缝, 缝后放置一焦距为 40 cm 的透镜, 试求在透镜焦面上出现的衍射条纹的中央明纹的宽度。

解 两个第一级暗纹中心间的距离即为中央明纹宽度, 利用单缝衍射公式 (11-21) 对第一级暗纹 ($k=1$) 求出其相应的衍射角 θ_1 为

$$a \sin \theta_1 = \lambda$$

式中 θ_1 很小, 于是 $\sin \theta_1 \approx \theta_1$, 所以

$$\theta_1 \approx \sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a}$$

中央明纹的角宽度为

$$2\theta_1 = \frac{2\lambda}{a}$$

透镜焦面上出现的宽度为

$$\Delta x = 2D \tan \theta_1 \approx 2D\theta_1 = \frac{2\lambda D}{a} = 1.0 \text{ mm}$$

可见, 中央明纹的宽度与缝宽 a 成反比, 单缝越窄, 中央明纹越宽。

例 11-5 单缝的衍射装置中, 缝宽 0.5 mm , 透镜焦距 50 cm , 不垂直照射, 在屏上 $x = 1.5 \text{ mm}$ 处, 某些波长的光出现光强极大, 试求:

- ① 可见光范围内这些光的波长及在该处的明纹级数 (中央明纹为零级);
- ② 单缝所在处的波阵面被分成的光波带数目。

解 由明纹条件 $a \sin \theta = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}$, 及明纹位置 $\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{f}$, 得

$$\lambda = \frac{2a \sin \theta}{2k+1} = \frac{2ax}{(2k+1)f} = \frac{3 \times 10^4}{2k+1} \text{ (Å)}$$

$$k=1, \quad \lambda_1 = 10000 \text{ Å}; \quad k=2, \quad \lambda_2 = 6000 \text{ Å}$$

$$k=3, \quad \lambda_3 = 4286 \text{ Å}; \quad k=4, \quad \lambda_4 = 3333 \text{ Å}$$

可见, 屏上 $x = 1.5 \text{ mm}$ 处明纹为波长 $\lambda_2 = 6000 \text{ Å}$ 的第二级和波长 $\lambda_3 = 4286 \text{ Å}$ 的第三级, 相应半波带数

$$k=2, \quad N = (2k+1) = 5; \quad k=3, \quad N = (2k+1) = 7$$

11.6 光栅衍射

11.6.1 光栅衍射 光栅方程

由等宽、等间隔的平行狭缝构成的衍射屏称为**衍射光栅**。广义地说, 具有周期性空间结构或光学性能(如透射率、折射率), 能起着等宽、等间隔地分割波阵面作用的衍射屏就是衍射光栅。光栅有两种, 一种是用于透射光衍射的透射光栅, 如在一块很平的玻璃上用金刚石刀尖刻出一系列等距的平行刻痕, 刻痕处因漫反射而不透光, 未刻过的部分相当于透光的狭缝, 这是一种简单的一维多缝透射式光栅。通过现代技术, 在一块普通的透明玻璃板上每毫米可刻上千条的刻痕。另一种是用于反射光衍射的反射光栅, 如 CD 唱片信息纹路是等间隔排列的镀有铝膜的槽纹, 用它可作反射光栅。

光栅衍射装置如图 11.25 所示, S 为光源, 位于透镜 L_1 的焦面上, 接收屏放在物镜 L_2 的焦面上。设光栅每条缝的宽度为 a , 缝间不透明宽度为 b , 则相邻狭缝的缝间距离为 $(a+b)$, 称为**光栅常数**, 它表示了光栅的空间周期性。以 N 表示光栅总缝数, S 发出的单色波长光线经透镜 L_1 后为平面光波, 垂直入射到光栅表面上, 光线经过透镜 L_2 后, 将在屏幕上呈现

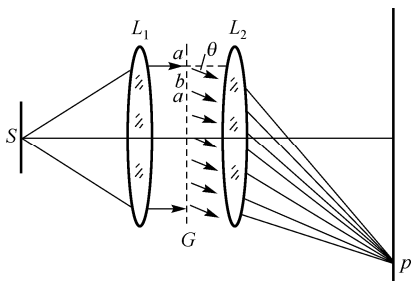


图 11.25 光栅衍射

各级衍射条纹。

对于光栅的每一条狭缝来说, 相当于缝宽为 a 的单缝衍射, 每一个单缝衍射的衍射图样是重合的, 若把每一狭缝看作一个整体, 总数为 N 的衍射光栅又相当于 N 个光束的干涉。因而, 光栅的衍射条纹应看作单缝衍射与 N 条光束干涉的总效果。理论计算和实验结果均表明: 在透镜 L_2 的焦平面上任一点的光强度, 等于由 N 条相干光在该点所产生的干涉光强度与宽度为 a 的单狭缝夫琅禾费衍射在该点所产生的光强

度的乘积。下面先分析 N 条相干光束干涉的明、暗纹条件和单缝衍射暗条纹的条件，再讨论光栅衍射的明、暗纹的条件。

如图 11.25 所示，设一组平行衍射光线的衍射角为 θ ，经透镜 L_2 后会聚在接收屏上的 P 点，光栅上任意相邻两缝的光程差相等，为 $(a+b)\sin\theta$ ，若这一光程差等于波长的整数倍，即满足

$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11-28)$$

则相邻两缝（所有的缝）发出的光到 P 点时将相互加强，从而 P 点出现明条纹，式 (11-28) 称为**光栅方程**。由于光栅上任意两缝的光束均在 P 点相互加强，把 P 点对应的明条纹称为**主极大**。又光栅的总缝数 N 均很大，且主极大位置是多组干涉明条纹叠加，因而光栅衍射中的主极大比杨氏双缝的明条纹亮得多。式中对应于 $k=0$ 的条纹叫中央明纹， $k=1, 2, \dots$ 的明纹分别叫第一明纹，第二明纹……正、负号表示各级对称分布在中央明纹两侧，主极大分布如图 11.26 所示。

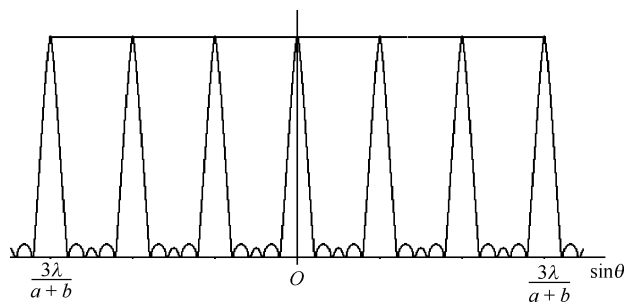


图 11.26 光栅衍射图样

光栅衍射的暗纹与次明纹分析：若 N 条相干光束在屏幕上某点 P 的总相差为 2π 或 2π 的整数倍，这 N 个振幅矢量将构成一个首尾相连的封闭的正 N 边形或整数 (k') 个相同且重叠的正多边形（总边数为 N ），因而合振幅为零。现知两个相邻狭缝的光振幅矢量间的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(a+b)\sin\theta \quad (11-29)$$

则 N 光束矢量构成闭合图形时，有干涉暗条纹条件为

$$N\Delta\varphi = \pm 2k'\pi, \quad k' = 1, 2, 3, \dots \quad (11-30)$$

即

$$N(a+b)\sin\theta = \pm k'\lambda, \quad k' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots \quad (11-31)$$

其中 $k' \neq N, 2N, 3N, \dots$ 是因为这已属于式 (11-28) 光栅方程规定的应出现主极大的情形。

11.6.2 光栅光谱 缺级现象

由上述分析可知,式(11-31)所给出的相邻的两明纹之间有 $N-1$ 个暗条纹。还有 $N-2$ 个明纹,其光强远小于主极大,显得很弱,称为次极大。明纹的宽度由它相邻的两个暗纹中心位置决定, N 越大,明纹宽度越窄。事实上,若 N 很大,光栅衍射的暗纹和次明纹之间实际上形成一片黑暗的背景,如图 11.27 所示为 $N=3$ 和 $N=20$ 的多缝衍射图样。正是由于这种特性,使主极大占据的宽度很小,而呈现出又亮又细的各级主明纹,这给光谱观察带来了极大的方便,通常把这个光谱称为这个波长的**光谱线**。



图 11.27 多缝衍射图样

光栅衍射的缺级现象和缺级条件分析:光栅衍射实验中其衍射条纹是由 N 个狭缝的衍射光相互干涉形成的,这就是说,在某个衍射角 θ 方向上,首先必须存在有每个缝的衍射光,然后 N 条衍射光才能产生干涉效应。亦即,即使满足光栅方程(11-28)使干涉结果为一主极大,但若此时 θ 恰又符合单缝衍射的暗纹条件式(11-21),则这点的

光强实际为零,把这种现象称为**缺级现象**,所以在缺级处,有

$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda, \quad k=0,1,2,\dots \quad (11-32)$$

$$a\sin\theta = \pm k'\lambda, \quad k'=1,2,\dots \quad (11-33)$$

联立以上两式并消去 θ , 则可得到出现缺级现象的主极大的级次 k 与单缝衍射暗纹的级次 k' 间的关系

$$\frac{a+b}{a} = \frac{k}{k'} \quad (11-34)$$

由此可知,如果光栅常数 $(a+b)$ 与缝宽 a 构成整数比时,就会发生缺级现象,例如, $\frac{a+b}{a} = \frac{k}{k'} = \frac{3}{1}$ 时,就会出现缺级。即在 $k=3,6,9,\dots$ 这些主明纹应该出现的地方,实际都观察不到它们,如图 11.28 所示。

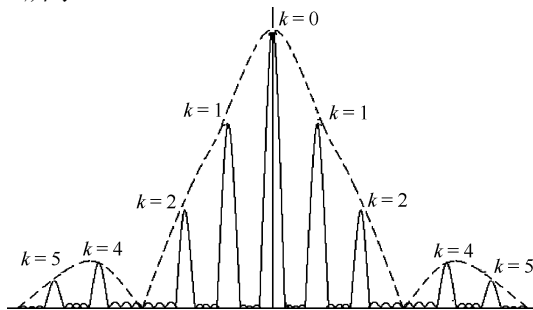


图 11.28 光栅的缺级现象

11.6.3 光的干涉与衍射

从杨氏双缝实验和光栅衍射问题讨论知道, 单色光通过每一个缝都存在衍射, 缝与缝间的光波又相互干涉, 那么干涉与衍射的区别在哪里呢?

如果从光波相干叠加引起光强度的重新分布, 形成稳定图样来看, 干涉和衍射并不存在实质性的区别。通常习惯上把有限光束的相干叠加称作干涉。而衍射是从同一波阵面上各点发出的无数个子波(球面波)的相干叠加。或更精确地说, 如果参与相干叠加的各光束是按几何光学直线传播的, 这种相干叠加是纯干涉问题, 如薄膜干涉情形, 在这种情形下不同级次的光强是一样的。而衍射条纹不同级次的光强是不同的, 级次高则光强弱; 如果参与相干叠加的各光束的传播不符合几何光学模型, 每一光束存在明显的衍射, 这种情形下干涉和衍射是同时存在的, 如杨氏双缝等分波阵面的干涉装置。在衍射存在的情况下, 干涉条纹要受到衍射的调制。在杨氏双缝实验中, 缝宽不同, 则调制情况也不同, 当缝宽很小时, 单缝衍射的中央明亮区的衍射范围很大, 是其他各级条纹的两倍。而双缝干涉条纹是等间距的, 在这种情况下讨论缝间干涉时, 无须考虑衍射对干涉条纹的调制, 故称为双缝干涉。而把缝宽不是很小时形成的干涉条纹不等强度分布的情形, 称为双缝衍射。

单缝衍射明、暗的条件与干涉恰好相反。干涉式(11-8b)和单缝衍射式(11-22)分别为

$$\text{干涉} \quad \delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k=0,1,2,\dots \quad \text{暗条纹}$$

$$\text{单缝衍射} \quad \delta = a \sin \theta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k=1,2,3,\dots \quad \text{明条纹}$$

这是因为前者两束相干光光程差为半波长的奇数倍时, 两束光波相位相反, 干涉减弱; 而后者, 在衍射角 θ 的方向上, 无数多条衍射光线的最大光程差为半波长的奇数倍时, 单缝能分成奇数个半波带, 相邻两波带上对应的衍射光彼此相消后, 最后剩下一个波带的衍射光不能相消, 故得明纹。

11.7 X 射线的衍射

11.7.1 电磁波谱

1895 年伦琴(W. C. Roentgen)研究阴极射线管时, 发现管的对阴极能放出一种有穿透力的肉眼看不见的射线。由于它的本质在当时是一个“未知数”, 故称之为 X 射线。这一伟大发现当即在医学上获得非凡的应用——X 射线透视技术。1912 年劳埃(M. Von Laue)以晶体为光栅, 发现了晶体的 X 射线衍射现象, 确定了 X 射线的电磁波性质。此后, X 射线的研究在科学技术上给晶体学及其相关学科带来了突破性的飞跃发展。由于 X 射线的重大意义和价值, 所以人们又以它的发现者的名字为其命名, 称为伦琴射线。X 射线和可见光一样属于电磁辐射, 但其波长比可见光短得多, 介于紫外线与 γ 射线之间, 约为 $10^{-3} \sim$

10 nm 的范围（如图 11.29 所示的电磁波谱）。X 射线的频率大约是可见光的 10^3 倍，所以它的光子能量比可见光的光子能量大得多，表现出明显的粒子性。由于 X 射线具有波长短、光子能量大的基本特性，所以，X 射线光学（几何光学和物理光学）虽然具有和普通光学一样的理论基础，但两者的性质却有很大的区别，X 射线与物质相互作用时产生的效应和可见光迥然不同。

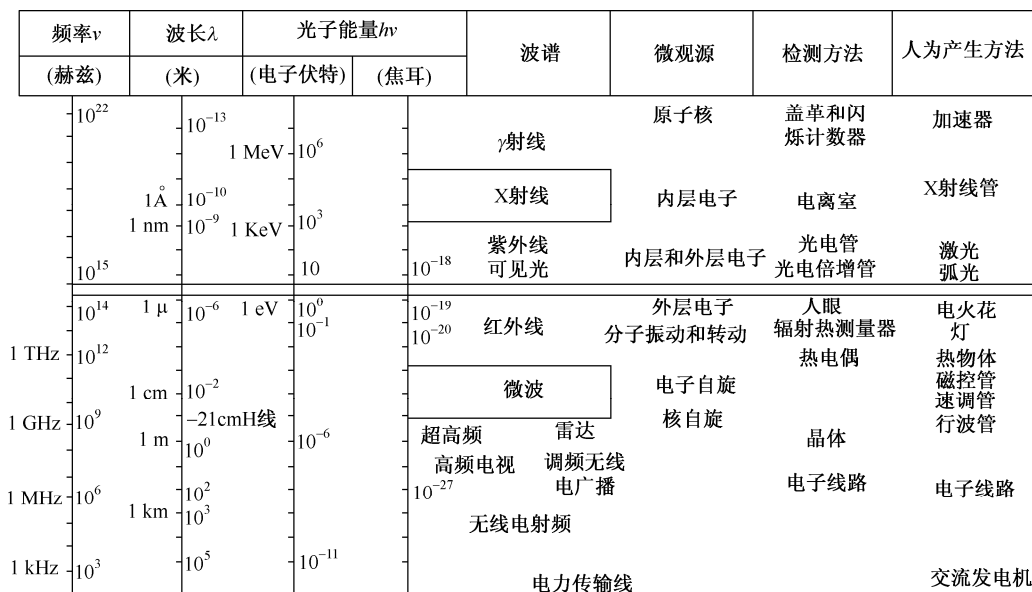


图 11.29 电磁波谱

X 射线和其他电磁波一样，能产生反射、折射、散射、干涉、衍射、偏振和吸收等现象。但是，在通常实验条件下，很难观察到 X 射线的反射。对于所有的介质，X 射线的折射率 n 都很接近于 1（但小于 1），所以几乎不能被偏折到任一有实际用途的程度，不可能像可见光那样用透镜成像。因为 $n \approx 1$ ，所以只有在极精密的工作中，需要考虑折射对 X 射线作用的影响时，才关注折射。X 射线能产生全反射，但是其掠射角极小，一般不超过 $20' \sim 30'$ 。

在物质的微观结构中，原子和分子的距离（0.1~1 nm）正好落在 X 射线的波长范围内，所以物质（特别是晶体）对 X 射线的散射和衍射能够传递极为丰富的微观结构信息。可以说，大多数关于 X 射线光学性质的研究及其应用都集中在散射和衍射现象上，尤其是衍射方面。X 射线衍射方法是当今研究物质微观结构的主要方法。

11.7.2 X 射线的产生

现在人们已经发现了许多 X 射线的产生机制，其中最为实用的能获得有足够强度的 X 射线的方法仍是当年伦琴所采用的方法——用阴极射线（高速电子束）轰击对阴极（靶）

的表面。各种各样专门用来产生 X 射线的 X 射线管的工作原理如图 11.30 所示。

X 射线管实际上是一只真空二极管，它有两个电极：作为阴极的用于发射电子的灯丝（钨丝），作为阳极的用于接受电子轰击的靶（又称对阴极）。X 射线管供电部分至少包含有一个使灯丝加热的低压电源和一个给两极施加高电压的高压发生器。由于总是受到高能量电子的轰击，阳极还须要强制冷却。

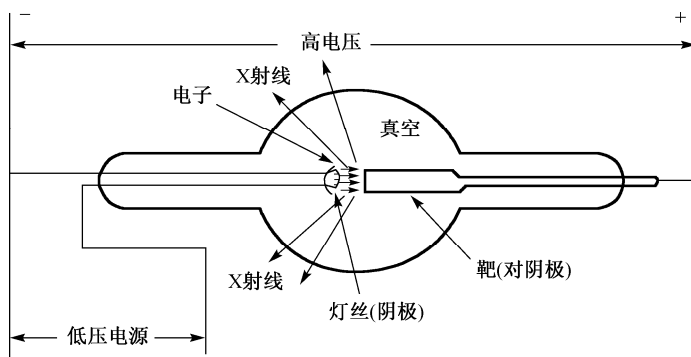


图 11.30 X 射线管的工作原理

当灯丝被通电加热至高温（达 2000°C ）时，大量的热电子产生，在极间的高压作用下被加速，高速轰击到靶面上。高速电子到达靶面，运动突然受阻，其动能部分转变为辐射能，以 X 射线的形式放出，这种形式产生的辐射称为轫致辐射。轰击到靶面上的电子束的总能量只有极小一部分转变为 X 射线能。靶面发射的 X 射线能量与电子束总能量的比率 ε 可用下面的公式近似表示：

$$\varepsilon = \frac{\text{X射线能量}}{\text{电子束总能量}} = 1.1 \times 10^{-9} ZV \quad (11-35)$$

式中 Z 为靶材组成元素的原子序数， V 为 X 射线管的极间电压（又称管电压），以伏特为单位。例如，对于一只铜靶的 X 射线管，在 30 kV 工作时， $\varepsilon = 0.2\%$ ，而一只钨靶的 X 射线管在 100 kV 条件下工作时，也不过有 $\varepsilon = 0.8\%$ 。可见 X 射线管产生 X 射线的能量效率是十分低的，但是，目前 X 射线管仍是最实用的产生 X 射线的器件。

因为轰击靶面电子束的绝大部分能量都转化为热能，所以在工作时，X 射线管的靶必须采取水冷（或其他手段）进行强制冷却，以免对阴极被加热至熔化，受到损坏。也是由于这个原故，X 射线管的最大功率受到一定限制，取决于阳极材料的熔点、导热系数和靶面冷却手段的效果等因素。同一种冷却结构的 X 射线管的额定功率，因靶材的不同是大不相同的。例如，铜靶（铜有极佳的导热性）和钼靶（钼的熔点很高）的功率常为相同结构的铁、钴、铬靶的两倍。

11.7.3 X 射线的衍射

1. 晶体对 X 射线的衍射

X 射线照射到晶体上发生散射，其中衍射现象是 X 射线被晶体散射的一种特殊表现。晶体的基本特征是其微观结构（原子、分子或离子的排列）具有周期性，如图 11.31 所示。它会构成一种适合 X 射线用的天然三维衍射光栅。当 X 射线被散射时，散射波中与入射波长相同的相干散射波会互相干涉，在一些特定的方向上互相加强，产生衍射线。晶体可能产生衍射的方向取决于晶体微观结构的类型（晶胞类型）及其基本尺寸（晶面间距，晶胞参数等）；而衍射强度取决于晶体中各组成原子的元素种类及其分布排列的坐标。晶体衍射方法是目前研究晶体结构最有力的方法。

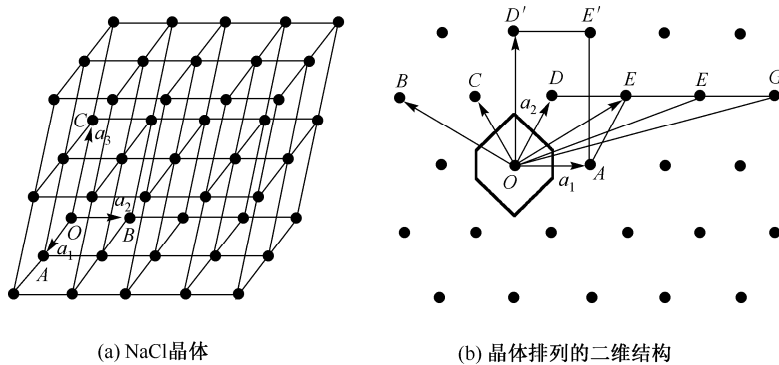


图 11.31 晶体由一组规则排列的（原子、离子或分子）组成

2. 劳埃方程 布拉格方程

表示 X 射线衍射方向与晶体结构之间关系的方程有两个：劳埃（M.Von Laue）方程和布拉格父子（W.H.Bragg 和 W.L.Bragg）方程。前者基于直线点阵，而后者基于平面点阵，这两个方程实际上是等效的。下面推导布拉格方程。

晶体的空间点阵可划分为一族平行且等间距的平面点阵，或称为晶面，将其当作反射光栅。同一晶体不同指标的晶面在空间的取向不同，晶面间距 d 也不同。设有一组晶面，间距为 d ，一束平行 X 射线射到该晶面族上，入射角（掠射角）为 θ 。对于每一个晶面散射波的最大干涉强度的条件应该是：入射角和散射角的大小相等，且入射线、散射线和平面法线三者在同一平面内（类似镜面对可见光的反射条件），如图 11.32 所示，因为在此条件下光程都是一样的，图中入射线 s_0 在 P 、 Q 、 R 处的相位相同，而散射线 s 在 P' 、 Q' 、 R' 处仍是同相，这是产生衍射的必要条件。

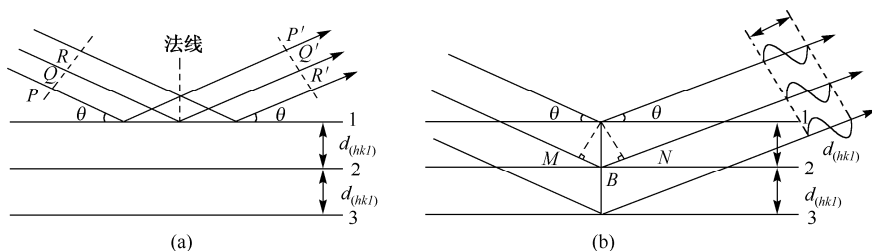


图 11.32 布拉格方程的推导

现在考虑相邻晶面产生衍射的条件。如图 11.32 所示的晶面 1、2、3、…间距为 $d_{(hkl)}$ ，相邻两个晶面上的入射线和散射线的光程差为 $MB + BN$ ，而 $MB = BN = d_{(hkl)} \sin \theta_n$ ，即光程差为 $2d_{(hkl)} \sin \theta_n$ ，当光程差为波长 λ 的整数倍时，相干散射波就能互相加强从而产生衍射。由此得到晶面族产生衍射的条件为

$$2d_{(hkl)} \sin \theta_n = n\lambda, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (11-36)$$

式中， θ_n 是 X 射线入射方向与晶面之间的夹角，为相应某一 n 值的**衍射角**（也叫**掠射角**）。 n 则称为衍射级数。式 (11.36) 称为**布拉格方程**或**布拉格条件**，是晶体学中最基本的方程之一。

根据布拉格方程，可以把晶体对 X 射线的衍射看作“反射”，并乐于借用普通光学中“反射”这个术语，因为晶面产生衍射时，入射线、衍射线和晶面法线的关系符合镜面对可见光的反射定律。但是，这种“反射”并不是任意入射角都能产生的，只有符合布拉格方程的条件才能发生，故又常称为“选择反射”。

例如，入射的单色 X 射线束以任意掠射角 θ 投射到晶面上，一般不产生反射加强，因为式 (11-36) 一般是得不到满足的。如果入射线的波长是连续分布的，则对于入射 X 射线束中波长值为

$$\lambda = \frac{2d \sin \theta_n}{n}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

的波，在反射中得到加强。

例 11-6 一束波长范围在 0.05 nm 至 0.2 nm 的 X 射线，以 60° 的掠射角入射到晶体常数 $d = 0.275$ nm 的晶面上，那么，产生强反射的波是_____。

分析：对于入射 X 射线束中波长值为 $\lambda = 2d \sin \theta_n / n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 的波才可能得到加强。

解 已知掠射角 $\theta_n = 60^\circ$ ， $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$ ，所以只有 $n=3, 4, 5$ 时的反射波才能得到加强，即

$$\lambda = 2d \sin \theta_n / n = \begin{cases} 0.195 \\ 0.119 \\ 0.095 \end{cases}$$

据此, 每当观测到一束衍射线, 就能立即想象出产生这个衍射的晶面族的取向, 并且由衍射角 θ_n 便可依据布拉格方程计算出这组平行晶面的间距 d (当实验波长也是已知时)。

由布拉格方程可以知道, 如果要进行晶体衍射实验, 其必要条件是: 所用 X 射线的波长 $\lambda < 2d$ 。但是 λ 不能太小, 否则衍射角也会很小, 衍射线将集中在出射光路附近的很小的角度范围内, 因此观测就无法进行。晶面间距一般在 1nm 以内, 此外, 考虑到在空气中波长大于 0.2nm 的 X 射线衰减很严重, 所以在晶体衍射中常用的 X 射线波长范围是 0.05nm 至 0.2nm。对于一组晶面 hkl , 它可能产生的衍射数目 n 取决于晶面间距 d , 因为必须满足 $n\lambda < 2d$ 。如果把第 n 级衍射视为和晶面族 hkl 平行但间距为 d/n 的晶面的第一级衍射 (依照晶面指数的定义, 这些假想晶面的指数为 nh, nk, nl , 在 n 个这样的假想晶面中只有一个实际晶体结构的一个点阵平面), 于是布拉格方程可以简化为

$$2d \sin \theta = \lambda, \quad (d = d/n) \quad (11-37)$$

因为在一般情况下, 一个三维晶体对一束平行而单色的入射 X 射线是不会使之产生衍射的, 如果要产生衍射, 则至少要求有一组晶面的取向恰好能满足布拉格方程, 所以对于单晶的衍射实验, 一般采用以下两种方法: ① 用一束平行的“白色”X 射线照射一颗静止的单晶, 这样, 对于任何一组晶面总有一个可能的波长能够满足布拉格方程; ② 用一束平行的单色 X 射线照射一颗不断旋转的晶体, 在晶体旋转的过程中各个取向的晶面都有机会通过满足布拉格方程的位置, 此时晶面与入射 X 射线所成的角度就是衍射角。对于无织构的多晶样品 (如微晶的聚晶体, 很细的粉末等), 当使用单色的 X 射线作入射光时, 总是能够产生衍射的。因为在样品中, 晶粒的取向是随机的, 所以任意一种取向的晶面总是有可能在某几颗取向恰当的晶粒中处于能产生衍射的位置, 这就是目前大多数多晶衍射实验所采用的方法, 称为“角度色散”型方法。对于多晶样品采用“白色”X 射线照射, 在固定的角度位置上观测, 则只有某些波长的 X 射线能产生衍射极大, 依据此时的角度大小和产生衍射的 X 射线波长就能计算得出相应的晶面间距大小, 这就是所谓“能量色散”型的多晶 X 射线衍射方法。

11.8 光的偏振

11.8.1 光的横波性与偏振态

光的电磁理论指出, 光是电磁波, 光的振动矢量 \mathbf{E} 与光的传播方向垂直。在与传播方向垂直的平面内振动矢量 \mathbf{E} 还可能有各式各样的振动状态, 称之为光的**偏振态**或**偏振结构**; 如果光矢量始终沿某一方向振动, 这样的光称为线偏振光, 光的振动方向与传播方向组成的平面称为**振动面**。常见的偏振光有线偏振光、部分偏振光、圆偏振光、椭圆偏振光。

11.8.2 自然光 偏振光

发光体称为光源。普通光源发出的光是由大量原子或分子所发出的波列，这些波列的相位和振动方向都是杂乱无章的，因而光振动矢量 \mathbf{E} 按统计平均来说不可能保持某一固定方向，而是以极快的不规则的次序取所有可能的方向，没有哪一个方向比其他方向更占优势，即光矢量的振动在各方向上的分布是对称的，振幅也可看作完全相等，如图 11.32(a) 所示，具有这种性质的光称为**自然光**。它是非偏振的。自然光中的光振动矢量 \mathbf{E} 在所有可能方向上的振幅都相等。把自然光的光振动矢量分别沿相互垂直的两个方向分解，在两个方向上合振动的振幅相等，各占自然光总光强的一半。如图 11.33(b) 所示。自然光可用如图 11.33(c) 所示的方法表示，图中用短线和点分别表示矢量 \mathbf{E} 在纸面内和垂直于纸面的光振动。

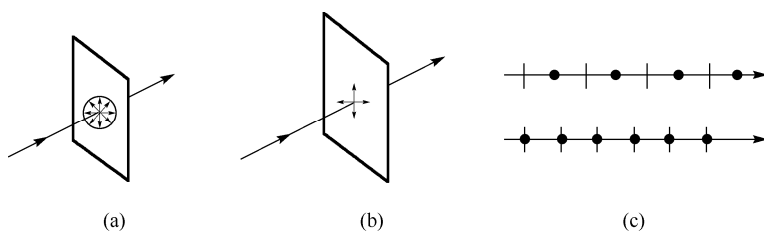


图 11.33 (a)自然光在各方向上光矢量振幅相等；(b)自然光分解为两个没有恒定相位差的垂直光振动的传播；(c) 自然光的表示

光振动矢量 \mathbf{E} 只沿一个固定的方向振动时，这种光称为**线偏振光**，简称**偏振光**，如图 11.34(a)、(b) 所示。线偏振光振动矢量 \mathbf{E} 的振动面是固定不变的。

光振动矢量 \mathbf{E} 在各方向都有，但振幅不相等，若在某振动方向上占有优势时，这样的偏振光称为**部分偏振光**，是一种介于线偏振光与自然光之间的一种偏振光，如图 11.34(c)、(d) 所示。

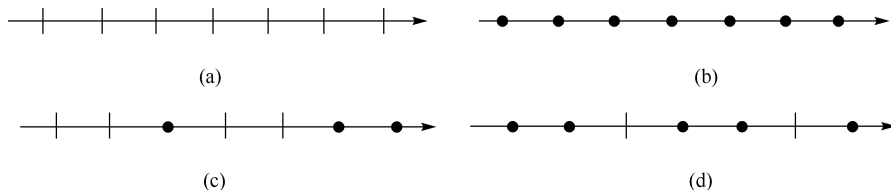


图 11.34 (a)、(b)线偏振光；(c)、(d)部分偏振光

11.8.3 圆偏振光和椭圆偏振光

光传播时，光矢量端点在绕着与传播方向垂直的平面内以一定频率旋转，可以是左旋，也可以是右旋。若光矢量端点轨迹是一个圆，这种光就叫圆偏振光；若光矢量端点轨迹是

一个椭圆, 这种光叫做椭圆偏振光。圆偏振光和椭圆偏振光可以看作是两个振动相位相差 $\pi/2$ 的线偏振光的合成, 振幅相等时为圆偏振光。

11.9 起偏和检偏 马吕斯定律

11.9.1 起偏和检偏

从自然光获得偏振光的过程称为**起偏**, 产生起偏作用的光学元件称为起偏器, 偏振片是一种常用的起偏器。某些物质(如硫酸金鸡纳砷、硫酸碘奎宁晶粒等)能强烈地吸收某方向的光振动, 而对与该方向垂直的分量吸收较少, 这种性质称为二向色性。利用这种二向色性的材料可以制成偏振片, 当自然光照射在偏振片上时, 只有特定方向的光振动通过, 把这个透光方向称为偏振片的偏振化方向或透振方向, 用符号“ \leftrightarrow ”表示, 并将其标示在偏振片上。图 11.35 所示为自然光通过偏振片射出后变成的线偏振光。

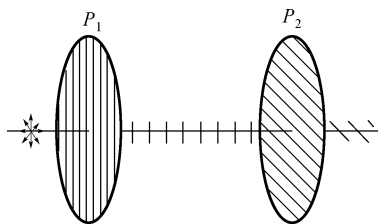


图 11.35 起偏和检偏

两个平行放置的偏振片 P_1 和 P_2 , 如图 11.35 所示。

当自然光垂直照射 P_1 时, 透过的光成为线偏振光, 其振动方向平行于 P_1 的偏振化方向, 强度 I_1 等于自然光强度 I_0 的 $1/2$ 。由于自然光对称均匀, 当起偏器旋转时, 出射的线偏振光振动面也旋转。由 P_1 出来的线偏振光入射到 P_2 偏振片时, 出射光也为线偏振光, 这时如果让 P_2 沿垂直光轴平面缓慢旋转(小于 90°), 透过的光强度随 P_2 的旋转而变化, 当 P_2 偏振化方向与 P_1 的偏振化方向平行时, 出射光矢量光强最强; 当 P_2 偏振化方向与 P_1 的偏振化方向垂直时, 出射光矢量光强为零, 这时称为**消光**。偏振片 P_2 沿光轴旋转一周的过程中, 透过 P_2 的光强经历两次最强, 两次消光。由此可知, 照射 P_2 的光是偏振光, 如果改用自然光照射 P_2 , 就不会出现两次最强和消光的现象, 利用这种现象, 可以识别入射光是否为偏振光, 这种识别偏振光的方法称为**检偏**。

11.9.2 马吕斯定律

由起偏器产生的偏振光在通过检偏器后, 其光强的变化如何呢? 马吕斯(E.L.Malus)于 1808 年由实验发现: 线偏振光透过检偏器时, 如果入射光的光强为 I_1 , 则透射光的光强 I_2 (不计检偏器对透射光的吸收) 为

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha \quad (11-38)$$

式中, α 是检偏器的偏振化方向与入射线偏振光的光矢量振动方向之间的夹角。该关系称

为**马吕斯定律**。该定律的证明如下：如图 11.36 所示，设 P_1 为入射光的光振动方向， P_2 是检偏器的检偏方向，两者的夹角为 α ， A_1 为线偏振光的光矢量的振幅。将光分解为平行于 P_2 和垂直于 P_2 的两个分振动，它们的振幅分别为 $A_1 \cos \alpha$ 和 $A_1 \sin \alpha$ ，因为只有平行分量可以通过 P_2 ，所以透射光的振幅为

$$A_2 = A_1 \cos \alpha$$

由于透射光的光强 I_2 与入射光的光强 I_1 之比等于各自振幅的平方之比，即

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{A_2^2}{A_1^2} = \cos^2 \alpha$$

可见，线偏振光通过检偏器后透射光强随 α 变化，当 $\alpha = 0^\circ$ 或 $\alpha = 180^\circ$ 时， $I_2 = I_1$ 光强最大；当 $\alpha = 90^\circ$ 或 $\alpha = 270^\circ$ 时， $I_2 = 0$ ，这是两个消光位置。 α 为其他值时， I_2 介于零和 I_1 之间。

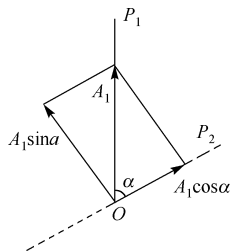


图 11.36 马吕斯定律

例 11-7 使自然光通过 A、B 两个偏振化方向成 60° 夹角的偏振片，透射光强为 I_1 ，在这两个偏振片之间再插入另一偏振片，它的偏振化方向与前两个偏振片均成 30° 角，则透射光强为多少？

分析：设入射自然光强度为 I_0 ，偏振片 A 对入射的自然光起到起偏作用，透射的偏振光光强恒为 $I_0/2$ ，而偏振片 B 对入射的偏振光起检偏作用，此时透射与入射的偏振光强满足马吕斯定律。若在偏振片 A、B 之间插入偏振片 C，则偏振片 B、C 均起检偏作用，故透射光强须两次应用马吕斯定律才能求出。

解 根据以上分析，入射光通过偏振片 A、B 后，透射光强为

$$I_1 = \frac{I_0}{2} \cos^2 60^\circ$$

在插入 C 偏振片后，其透射光强为

$$I_2 = \left(\frac{I_0}{2} \cos^2 30^\circ \right) \cos^2 30^\circ$$

两式之比可得

$$I_2 = 2.25 I_1$$

11.10 反射和折射时光的偏振 布儒斯特定律

自然光入射到折射率分别为 n_1 、 n_2 的两种不同介质的分界面上反射或折射时，反射光和折射光都将成为部分偏振光，如图 11.37(a)所示。实验表明：反射光的偏振化程度随着光的入射角变化而变化，在一特定入射角 i_B 时反射光有可能成为完全偏振光，折射光为部分偏振光，如图 11.37(b)所示。这个特定的入射角 i_B 为**布儒斯特角**，也叫**起偏角**。

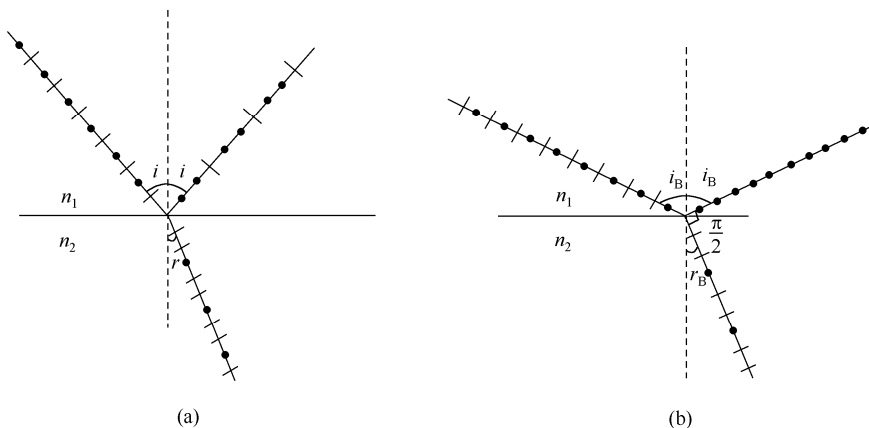


图 11.37 (a)自然光反射和折射后产生部分偏振光; (b)入射角为布儒斯特角

实验还指出: 自然光以起偏角 i_B 入射到两种介质的分界面时, 反射光和折射光相互垂直, 即

$$i_B + r = \frac{\pi}{2}$$

根据折射定律, 有

$$n_1 \sin i_B = n_2 \sin r = n_2 \cos i_B$$

即

$$\tan i_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (11-39)$$

式中, $n_{21} \left(= \frac{n_2}{n_1} \right)$ 是介质 2 对介质 1 的相对折射率。式 (11-39) 是 1812 年布儒斯特 (D.Brewster) 由实验确定的, 称为**布儒斯特定律**。

例 11-8 自然光从空气射到折射率 $n=1.33$ 的水面上, 与从空气射到折射率 $n=1.50$ 的玻璃界面上, 欲使反射光为偏振光, 则起偏角分别为多少?

解 根据式 (11-39), 布儒斯特角应满足

$$\tan i_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{空气 } n_1 = 1)$$

可知, 光在空气和水的界面上反射时的起偏角为

$$i_{B1} = \arctan 1.33 = 53.1^\circ$$

光在空气和玻璃的界面上反射时的起偏角为

$$i_{B2} = \arctan 1.50 = 56.3^\circ$$

反之, 光线由玻璃射向空气而反射时, 起偏角 $i'_{B2} = 33.7^\circ$, 显然, 这两者互为余角。

应说明的是,对于一般的光学玻璃,反射的偏振光的强度约为入射光强度的 7.5%,大部分光能透过玻璃。因此,利用单独一块玻璃面来获得偏振光其强度是很弱的。但如果利用玻璃片堆,并使入射角为起偏角,由于在各个界面上的反射光都是光振动垂直于入射面的偏振光,所以经过玻璃片堆反射后,入射光中大部分的垂直光振动被反射掉。从而就可获得较强的透射出的完全偏振光,如图 11.38 所示。

同样利用它们也可以检查偏振光。

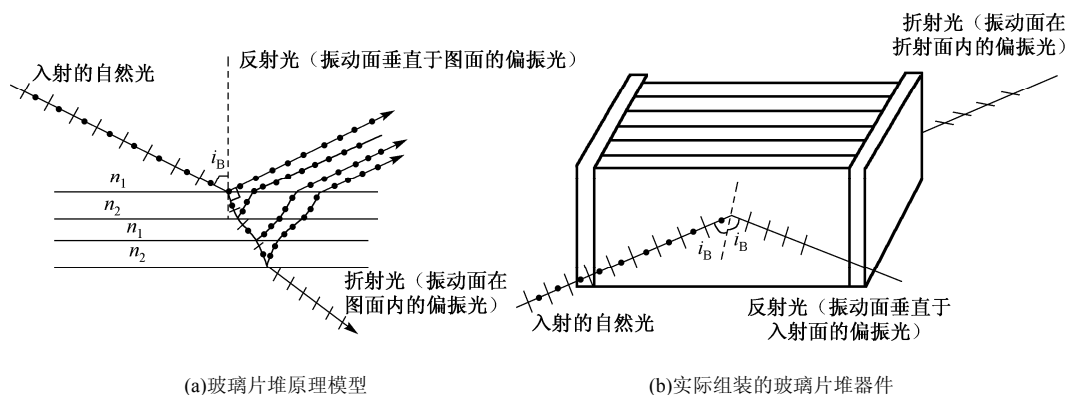


图 11.38 利用玻璃片堆产生偏振光

11.11 双折射

由于介质折射的原因,在清澈平静的水面上观察水下物体时,水下物体好像浮起来一点。但还是只看到一个像。对于一些透明介质,如方解石晶体(碳酸钙 CaCO_3 天然晶体),将其放在有字的纸上,发现有双重的字,且浮现在不同的高度,这表明,一束光进入这种晶体后,分裂成两束光线,它们沿不同方向折射,这一现象称为**双折射现象**。这种现象是由晶体各向异性造成的,通常光进入一般晶体时,都将产生双折射现象。

11.11.1 寻常光和非常光

一束光射入各向异性的晶体后分成两束折射光的现象称为双折射。其中一束光遵从折射定律,叫做寻常光,用 o 表示(简称 o 光);另一束不遵从折射定律,即折射光线不一定在入射面内,而且对不同的入射角 i ,入射角的正弦与折射角的正弦之比不是恒量,这束光称为非常光,用 e 表示(简称 e 光)。当光垂直于晶体表面入射并产生双折射时,如果将晶体绕光的入射方向转动,其中 o 光方向不变;而 e 光则随晶体的转动而绕 o 光转动,如图 11.39 所示。

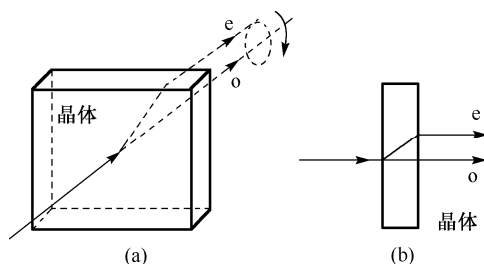


图 11.39 光的双折射现象

o 光和 e 光都是线偏振光, 但 e 光的折射线不一定在入射面内。寻常光在晶体内各方向上的传播速度相同, 而非常光的传播速度却随传播方向的变化而变化。

11.11.2 光轴、单轴晶体、双轴晶体、主平面

由于晶体的各向异性, 使非寻常光线在晶体内各个方向的传播速率不相同, 亦即光在各个方向上的折射率 ($n=c/v_e$) 不相等。但在双折射晶体内有一特殊方向, 光沿这个方向传播时将不发生双折射, 即 o 光和 e 光沿该方向的折射率 (或传播速度) 相同, 这一特殊方向称为晶体的**光轴**。注意, 凡平行于此方向的直线均为光轴。只有一个光轴的晶体, 称为**单轴晶体**。例如, 方解石、石英、红宝石等就是单轴晶体。有些晶体具有两个光轴方向, 这类晶体称为**双轴晶体**, 如云母、硫磺等。

在晶体中, 任一已知光线的传播方向与晶体光轴构成的平面, 叫做该光线的主平面。寻常光 (o 光) 的光振动方向垂直于寻常光的主平面; 非常光 (e 光) 的光振动方向在非常光的主平面内。一般情况下, o 光主平面与 e 光主平面不重合, 但在多数情况下, 这两个主平面之间的夹角很小, 因而可认为 o 光和 e 光的振动方向是互相垂直的。

11.11.3 惠更斯原理解释晶体的双折射

双折射现象可以用晶体结构和光的电磁理论来全面解释。在这里用惠更斯原理解释。由惠更斯原理可知, 自然光入射到晶体上时, 波阵面上的每一点都可作为子波源, o 光在晶体内任意点所引起的波阵面是球面, 即具有各向同性的传播速率。e 光在晶体内任意点所引起的波阵面是旋转椭球面。但沿光轴方向与 o 光具有相同的传播速率。

图 11.40(a)所示为平面波垂直入射晶体, 晶体的光轴在入射面内, 并与晶面平行, 入射角 $i=0$, 这时 o 光、e 光仍沿入射方向传播, 但是两者的传播速度不同, 从图可见, OO' 为 o 光的波阵面, EE' 为 e 光的波阵面, 因而此时也发生了双折射现象, 但 o 光和 e 光不分开。这种情况与光在晶体中沿光轴传播时只有一种传播速率、无双折射的情况是有本质区别的。

图 11.40(b)所示为光轴在入射面内, 且平行于晶面, 此时平面波是斜入射。AB 是入射波的波阵面, 当入射波由 B 传至 C 时, 自 A 已向晶体内发出球形和椭球形两个子波波阵面, 这两个子波波阵面相切于光轴 (此种情况在晶体表面相切)。在晶体中, CO 是寻常光的新波阵面, CE 是非寻常光的新波阵面, 引 AO 及 AE 两线, 就得到表示光在晶体中传播的两条光线。由此可见, 平面波斜入射时, o 光和 e 光分开, 发生了双折射。

图 11.40(c)所示为光轴垂直于入射面, 且平行于晶面, 平面波斜入射时, 新波阵面仅沿光轴方向相切, 而其他任何方向波阵面不相同, 因而 o 光和 e 光也分离, 即发生了双折射。

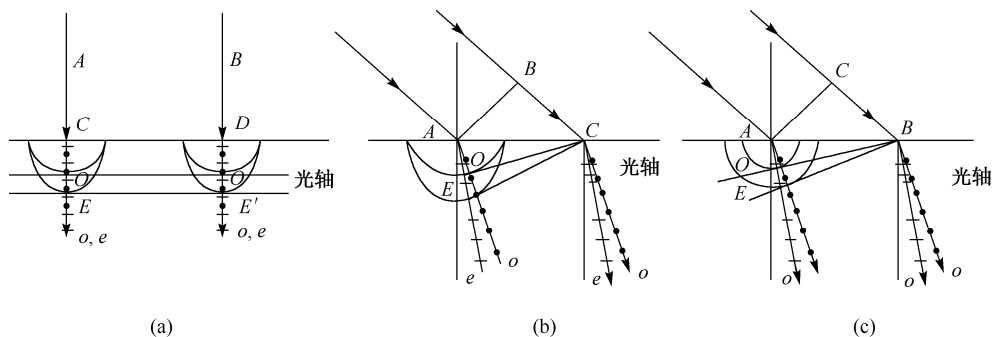


图 11.40 单轴晶体中 e 光、o 光传播方向

例 11-9 一块厚度为 $1.0 \times 10^{-5} \text{ m}$ 的方解石晶片, 插入偏振化方向相平行的两偏振片之间, 设晶片的光轴与偏振片的偏振化方向成 45° 角, 则在可见光范围内哪些波长的光是看不见的?

分析: 自然光通过第一块偏振片后变成线偏振光, 经过晶片后 o 光和 e 光产生恒定的相位差, 但此时 o 光和 e 光的光振动方向不同, 不满足干涉条件。第二块偏振片的作用是使 o 光和 e 光形成相同的振动方向, 从而产生干涉。本题的题意是要确定干涉相消的波长。

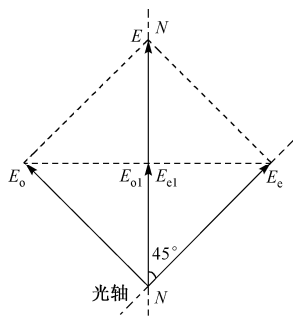


图 11.41 例 11-9 图

解 已知偏振片的偏振化方向 NN' 与光轴方向的夹角为 45° , 偏振光进入方解石后, 形成两束偏振光, o 光和 e 光的光振动振幅相等 $E_o = E_e$, 如图所示。由于 o 光和 e 光在晶片上传播速度不同, 因此从晶片出射的两束光存在相位差, 其值为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$$

晶片出射时的两束光通过偏振片后振动方向一致, 光振动振幅仍相同, $E_{o1} = E_{e1}$, 从而产生干涉, 干涉相消的条件为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d = \pm(2k+1)\pi \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

于是

$$\lambda = \frac{2(n_o - n_e)d}{2k+1} = \frac{2 \times (1.658 - 1.486) \times 1.0 \times 10^{-5}}{2k+1} = \frac{3.44 \times 10^{-6}}{2k+1}$$

可知, 当 $k=2$ 时, $\lambda_2 = 6.88 \times 10^{-7} \text{ m} = 688 \text{ nm}$; 当 $k=3$ 时, $\lambda_1 = 4.91 \times 10^{-7} \text{ m} = 491 \text{ nm}$ 。而当 k 取其他值时, 波长超出了可见光范围, 人眼看不见。

*11.12 几何光学

光是电磁波,而且只是电磁波谱中很窄的一个波段。尽管波是以波动形式传播的,但当光在各向同性的均匀介质中传播时遇到的障碍物线度比光波波长大很多时,波动的衍射效果不显著。在这种情况下,可将光的传播视为沿直线传播,可用波线作为光的传播径迹。这时,可以光的反射、折射两条基本实验定律为基础,用几何学方法来研究光在介质、光学元件及光学系统中的传播和成像规律,用这样的方法所研究的光学内容称为**几何光学**。本节简要介绍几何光学的基础知识。

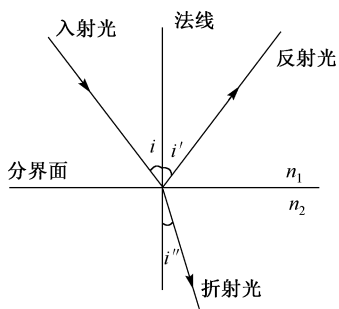
11.12.1 几何光学基本定律

1. 光的直线传播及光的反射和折射

在描述几何光学时,通常引入光线的概念。任意一点向任一方向发出直线,称为**光线**。光的直线传播、反射和折射都可以用直线段及其方向的改变来表示。对于光的传播,遵从三条基本实验定律:

① 光在均匀介质中沿直线传播,称为光的直线传播定律;

② 光在传播过程中与其他光束相遇时,各光束都各自独立传播,不改变其性质和传播方向;



③ 光在均匀介质中沿直线传播,在遇到两种均匀介质的分界面时,一般会同时产生反射和折射现象。人们把返回原介质中传播的光称为**反射光**,把进入另一介质按另一波速沿另一方向传播的光称为**折射光**,如图 11.42 所示。

实验表明:对于均匀介质,反射光、折射光都在由分界面法线与入射光线构成的入射面内,且与入射光线分处法线两侧。其中, i 、 i' 、 i'' 分别是入射角、反射角和折射角。反射角等于入射角,即

图 11.42 光的反射和折射

$$i = i' \quad (11-40)$$

这就是光的**反射定律**。

实验还发现:入射角 i 与折射角 i'' 的正弦之比与入射角无关,而与介质的相对折射率有关,即

$$\frac{\sin i}{\sin i''} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (11-41a)$$

或

$$n_1 \sin i = n_2 \sin i'' \quad (11-41b)$$

式中, n_{21} 为介质 2 相对于介质 1 的相对折射率。通常把任一介质相对真空的折射率, 称为该介质的绝对折射率, 简称折射率。所以, 式 (11-41a) 中的 n_1 、 n_2 就是介质 1 和介质 2 的折射率。折射率与介质、光的波长有关, 通常由实验测定。

理论和实验还表明: 任一介质中的光速 v 与真空中的光速 c 的关系为

$$n = \frac{c}{v} \quad (11-42)$$

同一频率 ν 的光在不同介质中传播, 频率一般不发生变化, 光在介质中的传播速度随光的波长而改变, 即

$$v = \nu \lambda \quad (11-43)$$

因此, 折射率是波长的函数, 设频率为 ν 的光在两种不同介质中的波长分别为 λ_1 和 λ_2 , 由式 (11-43) 和式 (11-42) 可得

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (11-44)$$

对于光在两种介质的分界面上的反射和折射, 如果光线逆着原来的反射线方向或折射线方向到达界面时就可以逆着原来的入射线方向反射和折射。即当光线的方向反转时, 光将沿同一路径逆向传播。这一现象称为光路可逆性原理。在研究光学仪器的成像问题时要用到此结论。

2. 光的漫反射、全反射

光线在传播中, 遇到界面要发生反射现象, 如果是同向传播的光线射到水平光滑界面, 则反射光束中的各条光线相互平行, 沿同一方向射出, 这种反射称为**镜面反射**, 如图 11.43(a)所示。如果界面粗糙, 则反射光线可以有各种不同的方向, 这种反射称为**漫反射**, 如图 11.43(b)所示。

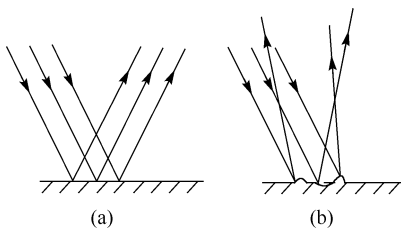


图 11.43 光的镜面反射与漫反射

光从折射率 (n_1) 大的介质射向折射率 (n_2) 小的界面时, 折射角 i'' 大于入射角 i

($i'' > i$), 当入射角达到或超过临界角 $i_c = \arcsin(n_2 / n_1)$ 时, 光线就不再折射而全部被反射, 这种现象称为光的全反射, 如图 11.44 所示的光导纤维。

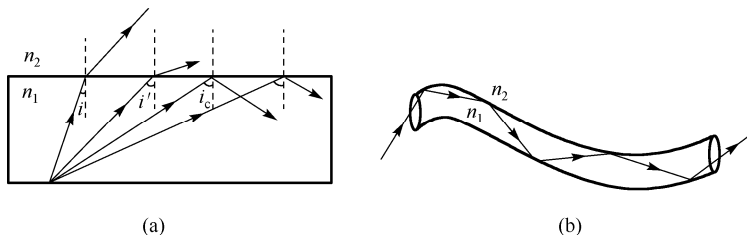


图 11.44 (a)入射角达到或超过临界角 $i \geq i_c$ 时发生全反射; (b) 光导纤维

11.12.2 光在平面上的反射和折射成像

从任一点光源 p 发出的光束, 经平面镜反射后, 其反射光线的反射延长线相交于 p' 点。因此, p' 点就是 p 点的虚像, 它位于镜后, 在通过点 p 向平面所作的垂直线上, 且有 $pN = p'N$, p' 点与 p 成镜面对称, 如图 11.45(a)所示。

与反射光不同, 折射光的折射角与入射角不成线性关系变化。所以, 点光源的折射光的反向延长线一般不会相交于同一点。如图 11.45(b)所示, 光从折射率为 n_1 的介质射向折射率为 n_2 的介质, 且 $n_1 > n_2$ 。 SM 是 S 发出的光线, 其入射角为 i , 根据折射定律有

$$n_1 \sin i = n_2 \sin i'$$

而 $y = x \cot i$, $y' = x \cot i'$, 故

$$y' = \frac{\cot i'}{\cot i} y = \frac{\sin i \cos i'}{\sin i' \cos i} y = \frac{n_1 \cos i'}{n_2 \cos i} y \quad (11-45)$$

由此可知, 当光源 S 位置不变时, 像点 S' 的位置 y' 随 x 而变化, 即由光源 S 点发出的不同方向的光线, 折射后的反向延长线不再交于同一点, 折射光线在空间也无同一交会点。

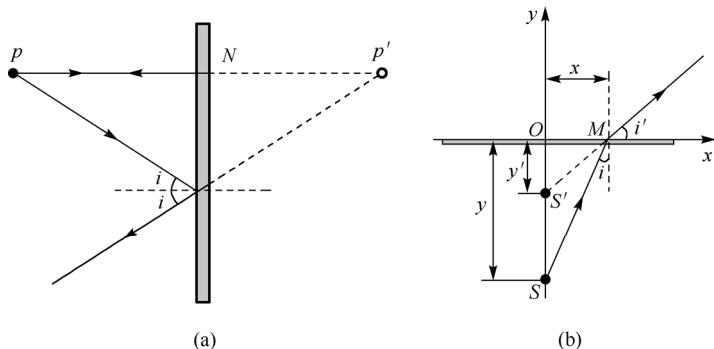


图 11.45 (a)平面镜成像; (b)平面折射成像

11.12.3 光在球面上的反射和折射成像

1. 在球面的反射成像

如图 11.46 所示为一球面镜的一部分，这部分的中心点 O 为顶点，球面的球心 C 为曲率中心，球面半径 r 称为曲率半径，连接顶点和曲率中心的直线 CO 为主光轴。应用反射定律可以证明，平行于主光轴的一组光线入射到该球形的凹面时，其反射光线并不交于一点，但对于靠近主光轴的光线（近轴光线）就会交于一点，这点就是凹面镜的焦点，用 F 表示。可以证明，焦距 f 等于凹球面半径的 $1/2$ 。下面利用作图法分别求物体在焦点内和焦点外两种情况下像的位置和大小。

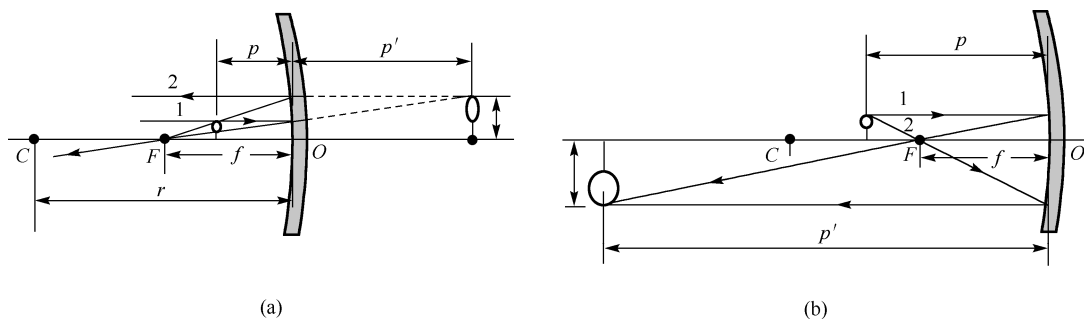


图 11.46 (a)焦点内外成像图；(b)焦点之外成像

物体在焦点内时。光线 1 平行于主光轴，反射后经过焦点 F ，光线 2 通过焦点（或反向延长线通过焦点），反射后平行于主光轴。这样反射线的延长线的交点，就是端点的虚像，如图 11.46(a)所示；而图 11.46(b)所示的情形表示两反射线的交点就是物体端点的实像。

若从反射镜面起 p 为物距， p' 为像距，则利用几何关系可以证明：

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \quad (11-46)$$

证明 从图 11.47 可以得到

$$\beta = \varphi + \theta, \quad \varphi = \alpha + \theta$$

结合两式消去 θ ，得

$$\alpha + \beta = 2\varphi$$

又

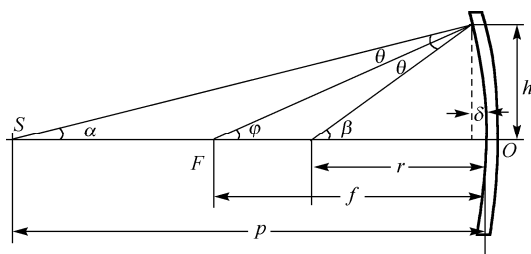


图 11.47 球面反射的物像公式推导

$$\tan \alpha = \frac{h}{p - \delta}, \quad \tan \beta = \frac{h}{p' - \delta}, \quad \tan \varphi = \frac{h}{r - \delta}$$

当 α 、 β 很小时, 这样的光线与主光轴靠得很近, 称为傍轴光线。在这种情况下,

$$\alpha = \frac{h}{p}, \quad \beta = \frac{h}{p'}, \quad \varphi = \frac{h}{r}$$

将其代入 $\alpha + \beta = 2\varphi$ 中, 得

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{r} \quad (11-47)$$

当 $p = \infty$ 时, $p' = \frac{r}{2}$, 即平行主光轴的光束经球面反射后, 将在光轴上会聚在一点, 该点就是前面所述的凹面镜的焦点, 用 F 表示, 从顶点到焦点的距离为焦距, 用 f 表示。图 11.48(a) 所示为凹面镜的焦点, 图 11.48(b) 所示为凸面镜的虚焦点, 图 11.48(c) 所示为入射光线与主光轴成很小角度, 光线会聚在垂直于主光轴且通过焦点的一个平面图上的 F' 点, 这个平面称为焦平面。由式 (11-47) 可知 $f = \frac{r}{2}$, 于是式 (11-47) 可写为

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

此式即为式 (11-46)。该式虽然用凹面导出, 但也适用于凸透镜。但要注意符号关系。

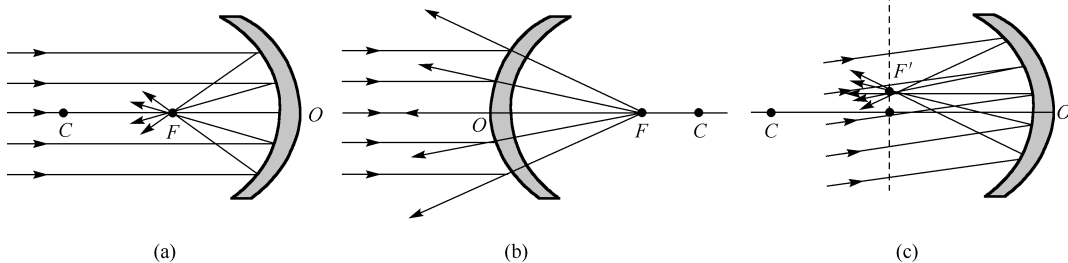


图 11.48 (a)凹面镜的焦点; (b)凸面镜的虚焦点; (c)虚焦点

对于式 (11-46), 要注意正、负号规则: 以球面顶点 (球面与主光轴的交点) 为分界点, 入射光线方向为正向。规定入射光线自左向右, 则当物点、像点、焦点和曲率中心在顶点右侧时, 物距、像距、焦距和曲率半径均为正; 反之, 在左侧为负。例如, 图 11.46(a) 中, $p < 0$, $f < 0$, $p' > 0$; 图 11.46(b) 中, $p < 0$, $f < 0$, $p' < 0$ 。

2. 球面上的折射成像

如图 11.49 所示, 主光轴上的物点 Q 在折射率为 n 的介质中发射出一条入射光, 照射在介质折射率为 n' 、半径为 r 的球体表面的 M 点, 折射光线交于轴上的 Q' 点。一般来说, 由 Q 点发出的不同倾角的光线, 折射后不再与主光轴交于同一点。即不存在唯一对应的成

像关系。但若考虑近轴光线，根据折射定律 $n \sin i = n' \sin i'$ ，且 i 、 i' 都很小，所以可近似表示为

$$ni = n'i'$$

利用三角形外角和内角的几何关系，得

$$i = \alpha + \varphi, \quad \varphi = i' + \beta$$

由上面三式消去 i 、 i' ，得

$$n_1 \alpha + n \beta = (n' - n) \varphi$$

由图 11.49 可知，当 α 、 β 和 i' 很小时，结合符号法则，有

$$\alpha \approx \tan \alpha \approx \frac{h}{-p}, \quad \beta \approx \tan \beta \approx \frac{h}{p'}, \quad \varphi \approx \tan \varphi \approx \frac{h}{r}$$

代入 $n_1 \alpha + n \beta = (n' - n) \varphi$ 中，可得

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r} \quad (11-48)$$

该式即为球面折射成像物像公式，它与夹角 α 无关，表明 Q 点发出的所有近轴光线都将会聚于 Q' 点。

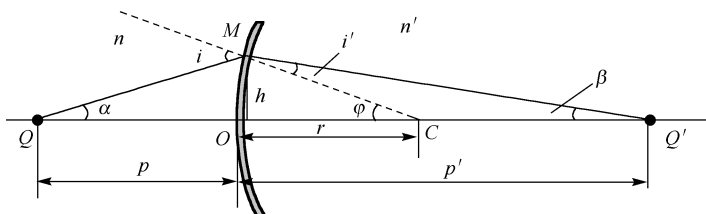


图 11.49 球面折射光路图

同样考虑，若式中 $p = \infty$ ，即入射线平行于主光轴，其像点 F' 称为**像方焦点**，相应的像距称为像方焦距，用 f' 表示；而当折射线平行主光轴，即 $p' = \infty$ ，其物点 F 称为**物方焦点**，相应的物距称为物方焦距，用 f 表示。于是由式 (11-48) 可知

$$f = \frac{nr}{n' - n}, \quad f' = \frac{n'r}{n' - n}$$

因而式 (11-48) 也可表示为

$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1 \quad (11-49)$$

一般来说，垂直于主光轴的物和像有不同的长度和倒像情况，如图 11.50 所示。设物体的高度和像高分别为 h_i 、 h_o ，并分别在光轴上方（为正）、下方（为负）。对于在近轴条

件下, 由几何关系有

$$\sin i \approx \tan i = \frac{h_o}{-p}, \quad \sin i' \approx \tan i' = \frac{-h_i}{p'}$$

代入折射定律 $n \sin i = n' \sin i'$, 结合符号规则, 得球面折射成像的横向放大率为

$$V = \frac{h_i}{h_o} = \frac{np'}{n'p} \quad (11-50)$$

横向放大率 $V > 0$ 表示像是正立的, $V < 0$ 表示像是倒立的; $|V| > 0$ 表示像是放大的, $|V| < 0$ 表示像是缩小的。式(11-50)也表明放大率与物高 h_o 无关, 这是由于只限于近轴光线的缘故, 否则像与物的相似性不能保证, 像会呈现出变了形的物像。

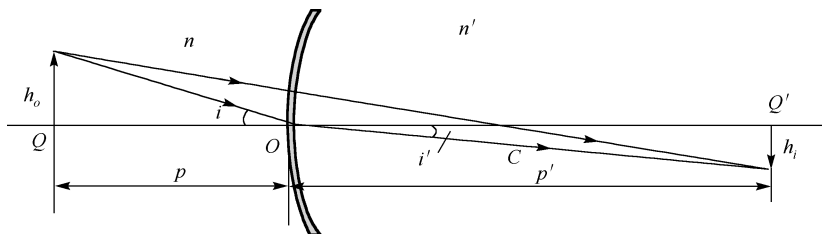


图 11.50 球面折射成像及其横向放大率

上述结论, 对凹面镜的折射依然成立。

11.12.4 薄透镜

在实际的折射情况下, 折射表面都不止一个, 就连眼镜的透镜也有两个折射面, 光从空气进入玻璃, 然后又由玻璃进入空气。其他如显微镜、望远镜、及照相机等光学器件中, 折射面的数目通常为两个以上。

如图 11.51 所示, 透镜由曲率半径分别为 r_1 、 r_2 的两个球面组成。光学透镜一般由玻璃或树脂制成, 若透镜的厚度 d 远小于两折射面的曲率半径, 该透镜称为薄透镜。

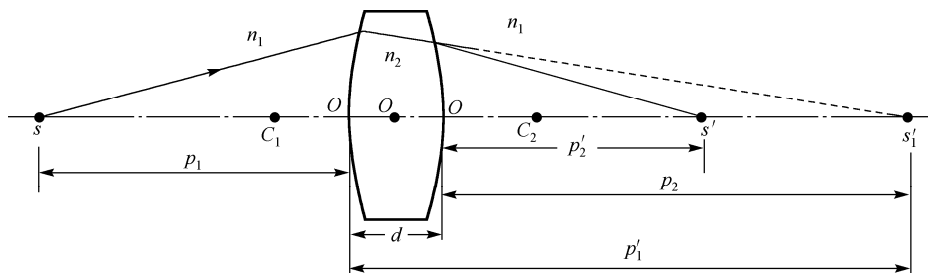


图 11.51 薄透镜成像

下面对透镜的两折射面的成像进行分析,从而导出薄透镜的成像公式。假设透镜放置于折射率为 n_1 的介质中,透镜的折射率为 n_2 ($n_1 < n_2$),透镜的曲率半径分别为 r_1 、 r_2 ,物点 s 位于透镜的左侧,物距为 p_1 。

物点 s 发出的光线射到透镜的左侧表面发生折射,像点在这条折射线的延长线与主轴的交点 s'_1 处。像距为 p_2 ,由球面折射的物像公式 (11-48),有

$$\frac{n_2}{p'_1} - \frac{n_1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{r_1}$$

接着,折射光线在透镜内向右侧球面入射,从折射率为 n_2 的介质进入折射率为 n_1 的介质中,则相应的折射物像公式为

$$\frac{n_1}{p'_2} - \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_1 - n_2}{r_2}$$

上述两个方程完整地描述了光穿过透镜的全过程,相互有关联,因而可将以上两式相加,得到

$$\frac{n_2}{p'_1} + \frac{n_1}{p'_2} - \left(\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p_2} \right) = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_1 - n_2}{r_2}$$

由于有透镜右侧的再一次折射,所以 s'_1 实际为右侧球面光线的一个虚物点,其物距 $p_2 = p'_1 - d \approx p'_1$,代入上式有

$$\frac{n_2}{p'_2} - \frac{n_1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_1 - n_2}{r_2} \quad (11-51)$$

对于薄透镜,规定物距 p 、像距 p' 从透镜中心算起,在忽略透镜厚度时,式 (11-51) 中的 p 和 p'_2 就用物距 p 、像距 p' 代替,整理后得到

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (11-52a)$$

这就是薄透镜的物像公式。若将薄透镜放于空气中,取 $n_1 \approx 1$,并将 n_2 用 n 代替,则式 (11-52a) 简化为

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (11-52b)$$

薄透镜的横向放大率可以由式 (11-50) 计算。光在左侧球面折射成像的横向放大率为

$$V_1 = \frac{h_1}{h} = \frac{n_1 p'_1}{n_2 p}$$

式中, h 为物高, h_1 为左侧球面折射成像的像高,也就是在右侧球面折射成像的(虚)物高度。这样光在右侧球面折射成像的横向放大率为

$$V_2 = \frac{h_2}{h_1} = \frac{n_2 p'_2}{n_1 p_2} = \frac{n_2 p'}{n_1 p'_1}$$

式中, h_2 为在右侧球面折射成像的像高, 式中考虑了 $p_2 = p'_1 - d \approx p'_1$ 。故总的横向放大率, 即薄透镜的横向放大率为

$$V = V_1 V_2 = \frac{n_1 p'_1}{n_2 p} \cdot \frac{n_2 p'}{n_1 p'_1} = \frac{p'}{p} \quad (11-53)$$

本章提要

1. 光的相干性

(1) 相干光: 一般光源不能产生干涉现象, 把能产生相干叠加的两束光称为相干光, 相干叠加必须满足振动频率相同、方向相同、相位差恒定的条件。两束相干光在交叠的区域里可看到干涉条纹。

(2) 从普通光源获得相干光的方法有两种: 一种是分波阵面法; 另一种是分振幅法。

(3) 光程、光程差: 若光在折射率为 n 的均匀介质中传播, 通过的几何路程若为 l , 则相应的光程为 $L (=nl)$ 。两束相干光的光程差、相位差为

$$\delta = n_2 l_2 - n_1 l_1, \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$$

其中 λ 为光在真空中的波长。

(4) 半波损失: 光学中将光从光疏(折射率小的)介质射向光密(折射率大的)介质, 并在界面上反射时, 反射波发生相位 π 的突变现象称为半波损失。因而, 在计算光程时, 凡有半波损失的光波, 相当于光程突变了 $\lambda/2$, 即相当于多走了半个波长。

透镜不引起附加光程差。

2. 光的衍射、光的干涉

(1) 光的衍射现象, 衍射和干涉一样也是波动的重要特征之一。把波遇到障碍物时, 它能绕过障碍物的边缘前进, 光将偏离直线传播的现象叫做光的衍射。

i. 夫琅禾费单缝衍射: 用半波带分析法。

$$P \text{ 点是暗纹中心} \quad a \sin \theta = \pm k \lambda \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$P \text{ 点是明纹中心} \quad a \sin \theta = \pm (2k+1) \lambda / 2 \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

ii. 光栅衍射: 透射光栅的总缝数为 N , 光栅常数为 $(a+b)$ 。当平行单色光垂直入射到光栅上, 衍射光束通过透镜会聚在透镜的焦平面上, 且在屏上几乎黑暗的背景上呈现出一系列又细又亮的明条纹, 缝数越多, 谱线越细越亮。

$$\text{光栅方程 } (a+b)\sin\theta = \pm k\lambda, \quad k=0,1,2,\dots$$

缺级条件（在满足光栅方程，但同时 θ 恰又符合单缝衍射的暗纹条件 $a\sin\theta = \pm k'\lambda$ ，就会出现缺级）即 $\frac{a+b}{a} = \frac{k}{k'}$ 为缺级条件。

(2) 光的干涉

干涉明暗条纹的条件

$$\delta = \begin{cases} \pm k\lambda, & k=0,1,2,\dots \text{ 明纹中心} \\ \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, & k=0,1,2,\dots \text{ 暗纹中心} \end{cases}$$

注意：必须根据具体干涉装置来选择正、负号及 k 的数值， k 并非都从零开始。实际处理光的干涉问题时，根据具体问题中相干光的光程差（注意有无半波损失），从而列出干涉明暗的具体条件，得出干涉条纹分布规律。

(3) 杨氏双缝干涉

当光程差 $\delta \approx r_2 - r_1 \approx \frac{xd}{D} = \pm k\lambda$ ， $k=0,1,2,\dots$ 明纹中心： $x = \pm k \frac{D}{d} \lambda$

当光程差 $\delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ ， $k=0,1,2,\dots$ 暗纹中心： $x = \pm(2k+1)\frac{D}{d} \frac{\lambda}{2}$

两相邻明纹（或暗纹）中心之间的距离为： $\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{D\lambda}{d}$

(4) 薄膜干涉

① 等倾干涉，薄膜厚度 e 均匀，以相同的倾角 i 入射时

$$\delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda, & k=1,2,\dots \text{ 明纹中心} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2}, & k=0,1,2,\dots \text{ 暗纹中心} \end{cases}$$

当光垂直入射时（ $i=0$ ）有

$$\delta = 2n_2d + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda, & k=1,2,\dots \text{ 明纹中心} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2}, & k=0,1,2,\dots \text{ 暗纹中心} \end{cases}$$

② 劈尖干涉，劈尖各处厚度不，由空气正入射 $i=0$ 时

$$2dn_2 + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda, & k=1,2,3,\dots \text{ 明纹} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2}, & k=0,1,2,\dots \text{ 暗纹} \end{cases}$$

③ 牛顿环，这实际是一个平面与一个曲面的劈尖，由空气下入射时

形成明环条件是 $\delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$, $k = 1, 2, 3, \dots$ 明环半径为 $r = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{R\lambda}{n_2}}$ 。

形成暗环条件是 $\delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ 暗环半径为 $r = \sqrt{kR\lambda / n_2}$ 。

3. 惠更斯-菲涅耳原理

给定波阵面 S 上每一面元 dS 都可以当成子波波源, 此后空间任一 P 点的光强为整个波阵面上所有面元发出的子波在 P 点引起的光振动的总和。

衍射现象中出现的明暗条纹, 正是从同一波阵面上发出的各子波相互干涉的结果。

4. 光学仪器的分辨率

最小分辨角 (瑞利判据): 当一个艾里斑的中心刚好落在另一个艾里斑的边缘时, 就认为两个像刚能够分辨, 把这时的艾里斑的半角宽度称为最小分辨角。即 $\delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$, 按此规定可求出两物点的距离作为光学仪器能分辨的两物点的最小距离, 以圆孔形物镜为例, 两物点 S_1 和 S_2 对仪器透镜光心的张角 $\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ 。

在光学中, 常将光学仪器的最小分辨角的倒数称为仪器的分辨率, 即分辨率为 $1/\theta$ 。

5. X 射线衍射的布拉格公式

$$2d \sin \theta = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

6. 光的偏振

光的偏振态: 自然光, 线偏振光, 部分偏振光, 椭圆偏振光, 圆偏振光。

\mathbf{E} 矢量的振动沿各个方向均等的光为自然光; 而只在某一固定方向有 \mathbf{E} 矢量振动的光为线偏振光, 简称为偏振光。介于两者之间的为部分偏振光。

马吕斯定律: $I = I_0 \cos^2 \alpha$, 其中 I_0 为入射偏振光的强度。 α 为入射偏振光振动方向与出射偏振光振动方向之间的夹角。

布儒斯特定律: 反射光的偏振化程度随着光的入射角变化而变化, 在一特定入射角 i_B 时反射光有可能成为完全偏振光, 折射光为部分偏振光。其数学形式为

$$\tan i_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

7. 双折射现象

一束光射入各向异性的晶体后分作两束折射光的现象。一束光遵从折射定律，叫做**寻常光**，简称 **o 光**；另一束不遵从折射定律，称为**非常光**，简称 **e 光**。o 光和 e 光均是线偏振光。

阅读材料

漫反射全息照相

全息照相是伽博 (D.Gabor) 于 1948 年研究成功的，由于当时还没有相干性好的光源，所以全息照相在那以后的十年间没有什么大发展。到了 20 世纪 60 年代初，由于激光的发明，在大量新型相干性极好的激光光源的帮助和一些技术进展的扩充下，全息照相便成为一门得到广泛研究并有远大前景的课题。这次复兴发源于美国密执安大学的雷达实验室，它是以利思 (E.N.Leith) 和乌帕特 (J. Upatnieks) 的工作为标志。他们于 1962 年发表了划时代的全息术研究成果，成功地得到了物体的立体重现像。全息图最惊人的特征，同时也必定是它最吸引人的地方就在于它产生极为逼真的三维幻觉的本领。这种完全逼真的性质无疑大大地推动了全息术的发展。伽博 (D.Gabor) 由此获得 1971 年诺贝尔物理学奖。全息术的应用涉及许多领域，如军事、医药、艺术、教育、印刷等行业。全息照相的方法有很多种，漫反射物体的全息照相是其中最基本的全息实验。

一、全息照相原理

普通照相是把从物体表面上各点发出的光（反射光或散射光）的强弱变化经照相物镜成像，并记录在感光底片上，这只记录了物光波的光强（振幅）信息，而失去了描述光波的另一个重要因素——位相信息，于是在照相底片上能显示的只是物体的二维平面像。全息照相则不仅可以把物光波的强度分布信息记录在感光底片上，而且可以把物光波的位相分布信息记录下来，即把物体的全部光学信息完全地记录下来，把所得的光干涉图样再经光化学处理后就成为全息图。当按照所需要的光照明此全息图时，就能再现三维物体的原像，它是 20 世纪 60 年代发展起来的一种新的照相技术，是激光的一种重要的应用。

全息照相的基本原理是利用相干性好的物光束 O 和参考光束 R 的干涉和衍射，将物光波的振幅和位相信息“冻结”在感光底片上，即以干涉条纹的形式记录下来，如图 11.52 所示。在底片上所记录的干涉图样的微观细节与物体上各点发出的光束对应，不同的物光束（物体发出的光）将产生不同的干涉图样。因此，全息图上只有很细密的干涉条纹，相当于一块复杂的光栅，当用与记录时的参考光完全相同的光以同样的角度照射全息图时，

就能在这“光栅”的衍射光波中得到原来的物光波，被“冻结”在全息片的物光波就能“复活”，通过全息图片就能看见一个逼真的虚像在原来放置物体的地方（尽管原物体已不存在），这就是全息图的物光波前再现，如图 11.53 所示。

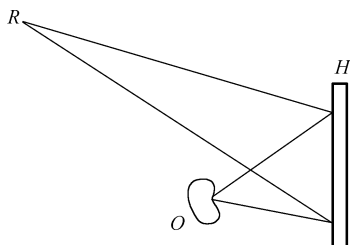


图 11.52 全息图记录

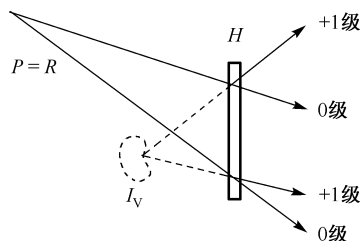


图 11.53 全息图虚像的观察

二、全息照相的过程

第一步是波前记录。设 x - y 平面为全息干板记录平面，底片上一点 (x, y) 处物光束 O 和参考光束 R 的复振幅分布分别为 $O(x, y)$ 和 $R(x, y)$ ，设

$$O(x, y) = O_0(x, y) \exp[j\varphi_O(x, y)]$$

$$R(x, y) = R_0(x, y) \exp[j\varphi_R(x, y)]$$

由于它们是相干光束，所以物光和参考光在底片上相干叠加后的光强分布为

$$\begin{aligned} I(x, y) &= |O(x, y) + R(x, y)|^2 \\ &= |O(x, y)|^2 + |R(x, y)|^2 + O(x, y)R^*(x, y) + O^*(x, y)R(x, y) \end{aligned}$$

若全息干板的曝光和冲洗都控制在振幅透过率 t 随曝光量 E [$E = (\text{光强}) \times (\text{曝光时间})$] 变化曲线的线性部分，则全息干板的透射系数 $t(x, y)$ 与光强 $I(x, y)$ 呈线性关系，即

$$t(x, y) = t_0 + \beta I(x, y)$$

式中， t_0 为底片的灰雾度； β 为比例常数，对于负片 $\beta < 0$ 。

这就是全息图的记录过程。

第二步是波前再现。若用光波 P 照明全息图，在全息图 (x, y) 点处该光波的复振幅为 $P_0(x, y)$ ，于是该光波用下式表示

$$P(x, y) = P_0(x, y) \exp[j\varphi_c(x, y)]$$

则透过全息图的光波在 x - y 平面上的复振幅分布为

$$\begin{aligned} D(x, y) &= P(x, y)t(x, y) = t_0 P(x, y) + \beta P(x, y)I(x, y) \\ &= t_0 P(x, y) + \beta P(x, y) \left[|O(x, y)|^2 + |R(x, y)|^2 \right] + \\ &\quad \beta P(x, y)O(x, y)R^*(x, y) + \beta P(x, y)O^*(x, y)R(x, y) \end{aligned}$$

式中, 第一、二项代表的是强度衰减了的照明光 P 的直接透射光, 也称零级衍射光, 如图 11.54 所示。第三项中, 当取照明光和参考光相同时, 即 $P(x, y) = R(x, y)$, 则再现光波为

$$D_3(x, y) = \beta O(x, y) R^2(x, y) = \beta O(x, y) R_0^2 \exp[j\varphi_0(x, y)]$$

其中 $R_0^2(x, y) = \text{实常数}$ 。因此这一项正比于 $O(x, y)$, 即除振幅大小改变外, 具有原始物光波的一切特性, 如果肉眼接收到这样的光波, 就会看到原来的“物”, 这个与“物”完全相同的再现像是一个虚像, 也称原始像, 如图 11.53 所示, 从不同的角度去观察, 还能看到原来被遮住的侧面。当再现光与参考光的共轭相同时, 即 $P(x, y) = R^*(x, y)$, 第四项有与原始物共轭的位相

$$D_4(x, y) = \beta O^*(x, y) R_0^2 \exp[-j\varphi_0(x, y)]$$

这意味着这一项代表一个实像, 它不在原来的方向上而是有偏移, 称之为“共轭实像”。通常把原始像的衍射光波称为+1 级衍射波, 把形成其共轭像的光波称为-1 级衍射波, 如图 11.53、图 11.54 所示。

三、全息照相的基本条件

(1) 参考光束和物光束必须是相干光。因此需用激光来作为照相光源, 且一般使物光光程与参考光光程相当, 相干长度 $L = \lambda^2 / \Delta\lambda$ 。

(2) 记录介质(底片的感光乳胶)要有足够的分辨率和对所使用的激光波长有足够的感光灵敏度。记录介质的分辨率通常以每毫米能分辨明暗相间的条纹数来表示。如果全息底片对于物光和参考光的照射方向是对称放置, 则干涉条纹的间距公式为

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta / 2}$$

式中, θ 为物光和参考光之间的夹角。可见夹角 θ 越大, 干涉条纹的间距越小, 条纹越密, 这就要求底片具有较高的分辨率。通常全息记录介质的分辨率 $> 1000 \text{ cy/mm}$ 。

(3) 光学系统必须有足够的机械稳定性。由于全息底片上记录的是精细的干涉条纹, 在记录过程中若受到某种干扰(如地面的振动, 光学零件支架的自振和变形, 以及空气的紊流等)则将引起干涉条纹的混乱和叠加, 导致衍射像亮度下降, 甚至完全看不到像。因此, 在曝光时间内干涉条纹的移动不得超过条纹间距的 $1/4$, 需要把整个拍摄系统安装在有效的防震台上。另外, 在全息底片的光谱灵敏范围内应设法增加激光的输出功率, 以便缩短曝光时间, 以减少外界因素的影响。

漫反射全息照相的基本方法是把从激光器发出单束相干光分为两束, 一束照明物体,

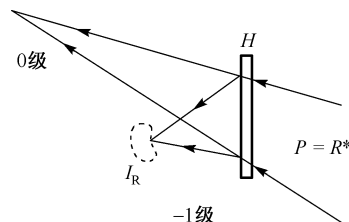


图 11.54 全息图实像的观察

另一束作为参考光束,并将光束进行扩束到具有一定的截面。参考光束一般为未受调制的球面波或平面波,参考光束的取向应使它能与物体反射(或散射)的物光束相交,在两束光重叠的区域内形成由干涉图样构成的光强分布,当感光介质放在重叠区域内,就会由于曝光产生光化学变化,经适当的处理后把这些变化转变为介质的光透射率的变化,即成了全息图。

四、实现全息照相的光路

1. 采用 Fresnel 全息图光路

采用全息图光路需对介质位于物光波的 Fresnel 衍射区进行记录。拍好全息图有两个重要因素,即①欲使物光光程近似等于参考光程,那么所拍摄的物体应有均匀的激光照明,且有较高的漫反射率,在全息干板处物光强与参考光强之比可控制在 $1:3 \sim 1:5$ 。②物光束与参考光束的几何排列,这影响到全息图的空间分辨率。因此,入射到记录底片上的两束光之间的夹角 θ 应取 $20^\circ \sim 50^\circ$,如图 11.55、图 11.56 所示。

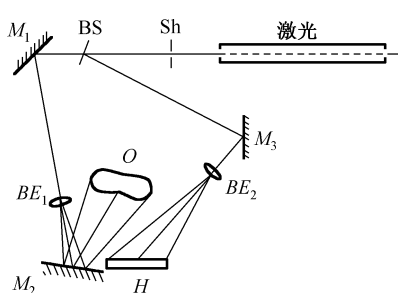


图 11.55 Fresnel 全息图拍摄实验光路

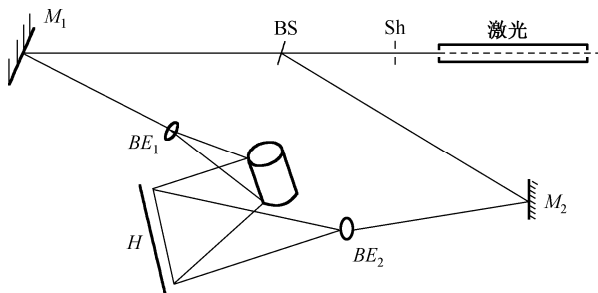


图 11.56 根据原理确定的实验参考光路

五、光路元件

- (1) Laser —— HN-T₃, 氦氖激光器[全息 I 型(氦、氖激光) 632.8 nm 波长]。
- (2) Sh —— Shutter 光快门。
- (3) BS —— Beamsplitter 光束分束器。
- (4) M₁, M₂, M₃ —— Mirrors 反射镜组。
- (5) BE₁, BE₂ —— Beamexpanders 光束扩束器组。
- (6) O —— Object 物体。
- (7) H —— Hologram 全息干板。

此外还附有防振平台、三维可调镜座、卷尺、冲洗系统、底片架。

六、实验步骤

- (1) 布置好光路,如图 11.55 所示,使物光光束和参考光束的夹角在 45° 左右,光强比

为 1:4 或 1:5, 光程相等, 并注意抑制物体的镜面反射, 以提高拍摄全息图质量。

(2) 将全息干板放置在底片架上, 乳胶面应朝向被拍摄物体, 待整个系统稳定 (即在所有元件就绪后, 一般需要 3~5 min 的“静台”) 后再进行曝光, 曝光时间由物光的强弱而定。

(3) 全息干板按常规感光底片显影定影冲洗处理, 为了增加衍射效率, 提高再现像亮度, 通常把定影后的全息图进行漂白处理, 使之变成为位相全息图。

(4) 全息图的重现。将拍摄好的全息图放回原先的底片架上, 遮住物光和被拍摄物体, 用参考光束照明全息图 (其乳胶面仍须朝向原物体), 通过全息图就可看到一个虚像, 像即呈现在原物所在的位置上, 就如同通过一扇窗来观察外面的物体, 不论从窗 (全息图) 的哪个角落往外看都能看到整个物体, 随着观察位置的改变, 再现像的透视面也随着变化, 景物上远近物体的视差是明显的, 如图 11.53 所示。因为全息图的每一部分都含有原物体所有的信息, 所以当用激光束照明全息图的不同部分 (或破碎全息图的任一小部分) 都仍然可以看到完整的再现像。不过, 全息图的每一部分将再现出物体的稍微不同的透视图, 随着所用全息图面积的减少, 像的分辨率就下降, 因为分辨本领与成像系统的孔径大小有关。前后移动全息图 (即选用不同曲率半径的球面波照明) 可观察到虚像的放大和缩小的变化。将全息图面反转 180° (绕垂直轴) 并将照明光变成与参考光共轭的会聚球面光波的同频率激光, 则在原来的物体的方位上得到物体的实像, 如图 11.54 所示。由于光是向着实像会聚, 所以可用毛玻璃来接收观察, 也可直接用感光底片或光探测器检测。图 11.57 所示为激光全息片的虚像。

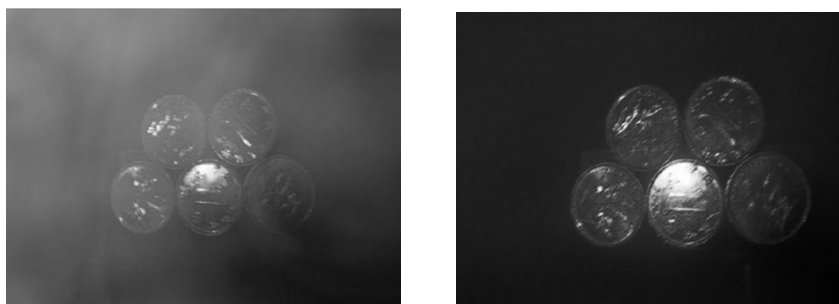


图 11.57 激光全息图照片

习题

11.1 在双缝干涉实验中, 波长 $\lambda = 500 \text{ nm}$ 的单色光入射在缝间距 $d = 2 \times 10^{-4} \text{ m}$ 的双缝上, 屏到双缝的距离为 2 m , 则

① 每条明纹的宽度为 ()。

- A. $5 \times 10^{-3} \text{ m}$ B. $5 \times 10^{-2} \text{ m}$ C. $3 \times 10^{-2} \text{ m}$ D. 0.1 m

② 中央明纹两侧的两条第 10 级明纹中心的间距为 ()。

- A. 5×10^{-3} m B. 5×10^{-2} m C. 3×10^{-2} m D. 0.1 m

③ 若用一厚度为 $e = 6.6 \times 10^{-6}$ m 的云片覆盖其中一缝后, 零级明纹移到原来的第 7 级明纹处, 则云母的折射率为 ()。

- A. 1.5 B. 1.53 C. 1.64 D. 2

11.2 一折射率为 1.64 的直角玻璃棱镜, 如图 11.58 所示, 光线垂直入射到 AB 面, 为使其在 AC 面上发生全反射, 则

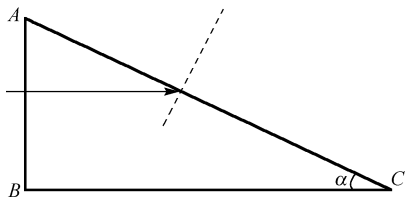


图 11.58 习题 11.2 图

① 将此镜置于空气中时角 α 的最大值为 ()。

- A. 35.81° B. $< 90^\circ$
C. 52.43° D. 45°

② 将此镜置于折射率为 $1.33r$ 的水中时角 α 的最大值为 ()。

- A. $< 90^\circ$ B. 35.81° C. 52.43° D. 60°

11.3 折射率为 1.30 的油膜覆盖在折射率为 1.50 的玻璃片上, 用白光垂直照射油膜, 观察到波长 $\lambda = 500$ nm 的绿色透射光加强, 则油膜的最小厚度是 ()。

- A. 83.3 nm B. 250 nm C. 192.3 nm D. 96.2 nm

11.4 在单缝夫琅禾费衍射实验中, 波长为 λ 的单色光垂直入射到宽度为 3λ 的单缝上, 对应于衍射角为 30° 的方向, 单缝处波阵面可分成的半波带数目为 ()。

- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 6 个

11.5 一直径为 2 mm 的氦氖激光束射向月球表面, 其波长为 632.8 nm。已知月球和地面的距离为 3.84×10^5 km。则

① 在月球上得到的光斑的直径为_____;

② 如果这激光束经扩束器扩展为 2m, 则在月球表面上得到的光斑的直径为_____。

11.6 光强为 I_0 的自然光垂直通过两个偏振片后, 出射光强 $I = I_0 / 8$, 则两个偏振片的偏振化方向之间的夹角为_____。

11.7 已知一球面凹镜的曲率半径为 102.8 cm, 一块平凸透镜的凸面放在凹面上, 如图 11.59 所示, 如果用波长为 589.3 nm 的钠光照射, 可观察到牛顿环, 并测得第四级暗环的半径为 2.250 cm。求平凸透镜的曲率半径。

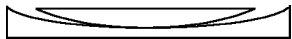


图 11.59 习题 11.7 图

11.8 在图 11.60 所示的几种入射情况中, 画出折射光和反射光, 并用点和短线把其振动方向表示出来。图中, $i_0 = \arctan n$, $i \neq i_0$ 。

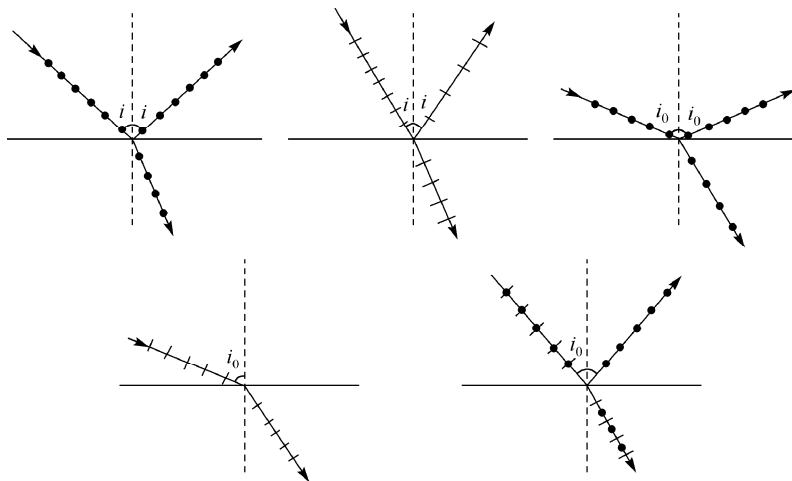


图 11.60 习题 11.8 图

11.9 如图 11.61 所示, 一射电望远镜的天线设在湖岸上, 距湖面高度为 h , 对岸地平线上方有一恒星刚刚升起, 恒星发出的波长为 λ 的电磁波。试求当天线测得第一级干涉极大时恒星所在的角位置 θ (作为洛埃德镜分析)。

11.10 用波长 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ 的氦氖激光光源垂直照射光栅。已知第一级明纹出现在 30° 的方向上, 则①光栅常量是多少? ②该光栅每厘米内有多少条缝? ③第二级明纹是否可能出现? 为什么?

11.11 用方解石晶体(负晶体)切成一个截面为正三角形的棱镜, 光轴方向如图 11.62 所示, 若自然光以入射角 i 入射并产生双折射, 试定性分别画出 o 光和 e 光的光路及振动方向(负晶体: $v_o < v_e$, 亦即 $n_o > n_e$)。

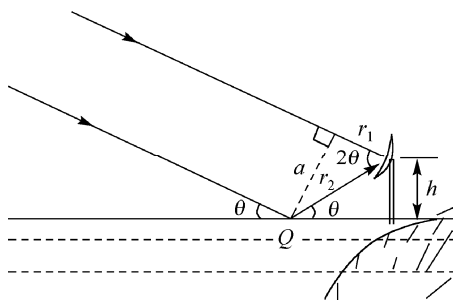


图 11.61 习题 11.9 图

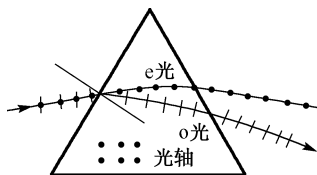


图 11.62 习题 11.11 图

11.12 光强为 I_0 的自然光垂直通过两个偏振片后, 出射光强 $I = I_0 / 8$, 则两个偏振片的偏振化方向之间的夹角为_____。

11.13 一折射率为 1.64 的直角玻璃棱镜,如图 11.63 所示,光线垂直入射到 AB 面,为使其在 AC 面上发生全反射,则

- ① 将此镜置于空气中时角 α 的最大值是 ()。
- A. 35.81° B. $<90^\circ$ C. 52.43° D. 45°
- ② 将此镜置于折射率为 1.33 的水中时角 α 的最大值是 ()。
- A. $<90^\circ$ B. 35.81° C. 52.43° D. 60°

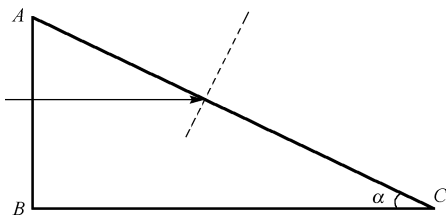


图 11.63 习题 11.13 图

11.14 折射率为 1.30 的油膜覆盖在折射率为 1.50 的玻璃片上,用白光垂直照射油膜,观察到波长 $\lambda = 500 \text{ nm}$ 的绿色透射光加强,则油膜的最小厚度是 ()。

- A. 83.3 nm B. 250 nm C. 192.3 nm D. 96.2 nm

11.15 三个偏振片 P_1 、 P_2 和 P_3 堆叠在一起, P_1 、 P_3 的偏振化方向相互垂直, P_2 与 P_1 的偏振化方向间的夹角为 45° 。强度为 I_0 的自然光入射于偏振片 P_1 上,并依次透过偏振片 P_1 、 P_2 和 P_3 , 则通过三个偏振片后的光强度为 ()。

- A. $I_0/16$ B. $3I_0/8$ C. $I_0/8$ D. $I_0/4$

11.16 某种透明介质对空气的临界角(指全反射)等于 45° , 光从空气向此介质入射时的布儒斯特角是多少?

11.17 水的折射率为 1.33, 玻璃的折射率为 1.5, 当光由水中射向玻璃而反射时, 起偏角为多少? 当光由玻璃射向水而反射时, 起偏角又为多少?

11.18 一束线偏振平行光, 在真空中波长为 589 nm , 垂直入射到方解石晶体上, 晶体的光轴与表面平行, 已知方解石晶体对此光的折射率为 $n_o = 1.658$ 、 $n_e = 1.486$, 则这晶体中的寻常光的波长 λ_o 和非寻常光的波长 λ_e 各为多少?

11.19 将一块厚度为 $1.0 \times 10^{-5} \text{ m}$ 的方解石晶片插入偏振化方向相平行的两偏振片之间, 设晶片的光轴与偏振片的偏振化方向成 45° 角, 则在可见光范围内哪些波长的光看不见?

11.20 棱镜 $ABCD$ 由两个 45° 的方解石棱镜组成, 棱镜的光轴垂直于图面。如图 11.64 所示, 当自然光垂直于 AB 入射时, 试在图中画出 o 光和 e 光的传播方向及光矢量振动方向。

11.21 波长为 500 nm 的平行光垂直地入射于一宽为 1 mm 的狭缝, 若在缝的后面有一焦距为 100 cm 薄透镜, 使光线聚焦于一屏幕上, 试问从衍射图样的中心点到下列各点的距离如何? ① 第一级暗纹中心; ② 第一级明纹中心; ③ 第三级暗纹中心。

11.22 为了测定一个给定光栅的光栅常数，用氦氖激光器的红光（632.8 nm）垂直地照射光栅，做夫琅禾费衍射实验。已知第一级明纹出现在 38° 的方向，问该光栅的光栅常数是多少？1 cm 内有多少条狭缝？第二级明纹出现在什么角度？

11.23 如图 11.65 所示的入射 X 线束不是单色的，而是含有从 0.095 nm 到 0.130 nm 这一范围内的各种波长。晶体的晶体常数 $a_0 = 0.275$ nm，试问：对图示的晶面能否产生强反射？

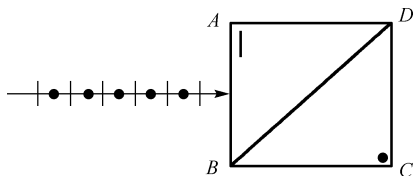


图 11.64 习题 11.20 图

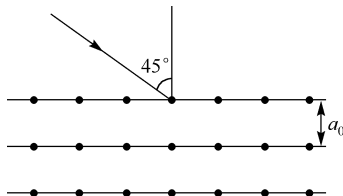


图 11.65 习题 11.23 图

11.24 水的折射率为 1.33，玻璃的折射率为 1.50，当光从中射向玻璃而反射时，起偏角为多少？当光从玻璃射向水中而反射时，起偏角又为多少？这两个起偏角的数值是什么关系？

11.25 在迎面驶来的汽车上，两盏前灯相距 $r = 150$ cm，试求：在离车多远处的人恰能分辨这两盏灯？设夜间人的瞳孔直径 $D = 4.0$ mm，入射光波为 550 nm，车与人的距离为 s 。

第 12 章 相对论基础

从力学部分的讨论中可知，以牛顿运动定律为基础的经典力学的概念和理论，对解决宏观物体在低速运动时卓有成效，且对现代科学和技术的发展起到了很大的推动作用，其自身的理论也日趋完善。

19 世纪末，麦克斯韦电磁理论的建立不仅对宏观的电磁现象进行了总结，而且预言了电磁波的存在。人们发现真空中光速在任何方向都以同一速度 c 传播，与参考系的选择无关。但按照当时经典力学的伽利略速度变换式，物体的速度是和惯性系的选取有关的，如果这样，光速就应该随惯性的系选取而有所不同，也即光速不再是一个常量。显然这与经典力学的伽利略速度变换公式相矛盾，为了解决这一矛盾，当时很多物理学家设计了各种实验，力求去寻找符合经典绝对空间的惯性系——以太参考系。1887 年迈克尔逊（A.A.Michelson）和莫雷（E.W.Morley）的著名实验就是其中之一，但该实验结果并没有找到“以太参考系”，却得出了否定的结果，即以太参考系是不存在的。鉴于这些事实，爱因斯坦在麦克斯韦电磁理论的基础上，洞察到经典时空观的缺陷，从而革命性地提出光速不变原理和狭义相对论，从而建立了新的力学理论——相对论。

12.1 力学相对性原理 伽利略变换

12.1.1 经典力学的相对性原理

一般来说，对所有物理现象的观测和对所有物理规律的描述都是相对于某一给定的参考系而言的。在同一类参考系（惯性系）中去观测物理现象，所得到的物理规律都是相同的。也就是说，力学规律在所有惯性系中都有相同的数学表达式，即力学规律有相同的描述，力学定律有相同的形式，这就是力学相对性原理。

也可以将力学相对性原理表述为，在研究力学规律时所有惯性系都是等价的。力学的相对性原理是伽利略发现的，也称为伽利略相对性原理。例如，静坐在匀速直线运动的汽车上，将车窗全部关闭看不到外面，人在车中感觉不到车在前进。这时，竖直向上抛掷一物体，物体仍将落回原处；人向车前进的方向跳跃并不会比在地面跳得更远。由此可见，在匀速直线运动的车上发生的一切力学现象与在地面上并没有区别，所以力学规律在所有惯性系中是等价的。

12.1.2 经典力学的绝对时空观

任何运动都须要在一定的时间和空间内进行, 经典力学在讨论运动和参考系时则提出了绝对时空观。绝对时间观是指时间的量度与参考系无关, 在任何一个参考系中测量同一个事件所发生的时间间隔是相同的。绝对空间观是指长度的量度与参考系无关, 在任何一个参考系中测量同一物体的长度是相同的。经典力学的绝对时空观指出了时间和空间是彼此独立、互不相关的, 也是独立于运动之外的。时空测量与参考系的选择以及它们之间的相对运动状态无关。

然而, 现代大量实践证明, 绝对时空是不正确的, 相对论否定了经典时空观, 并建立的新时空概念。

12.1.3 伽利略变换

要描述一个物体的运动, 须要选择一个参考系, 物体是相对于参考系在运动。为了考察两个不同参考系间对同一运动物体时空坐标的关联, 这里建立了惯性参考系 K 和 K' , 且 K' 系相对于 K 系以速度 u 做匀速直线运动, 并将 Ox 与 Ox' 轴取在与速度方向在同一直线上, 其他对应的坐标轴各自平行, 如图 12.1 所示。

现在, 在 K 系和 K' 系中同时来观测同一物体 P 的运动情况。在 K 系中测得物体 P 在 t 时刻的空间位置坐标是 (x, y, z) , 速度是 \mathbf{v} , 加速度是 \mathbf{a} 。在 K' 系中测得物体 P 在相应的时刻 t' 的空间位置坐标是 (x', y', z') , 速度是 \mathbf{v}' , 加速度是 \mathbf{a}' 。根据经典力学的绝对时空观, 在不同参考系中测得的时刻是相同的, 所以有 $t = t'$, y 轴和 z 轴方向的坐标也是相同的, x 轴方向的坐标相差一段距离。因此, 可以得到在这两个参考系中所测得同一物体的时间和坐标之间的关系为

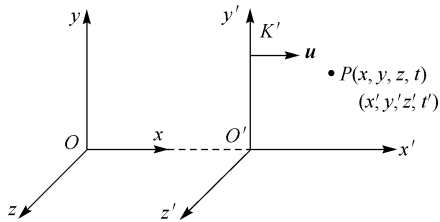


图 12.1 伽利略变换

$$\begin{aligned} \text{正变换} \begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} & \quad \text{逆变换} \begin{cases} x' = x + ut \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \end{aligned} \quad (12-1)$$

式 (12-1) 称为伽利略坐标变换。根据速度的定义, 由式 (12-1) 可得伽利略速度变换为

$$\begin{aligned} \text{正变换} \begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} & \quad \text{逆变换} \begin{cases} v_x = v'_x + u \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases} \end{aligned} \quad (12-2)$$

即 $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$ 。根据加速度定义, 由式(12-2)可得伽利略加速度变换为

$$\text{正变换} \begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases} \quad \text{逆变换} \begin{cases} a_x = a'_x \\ a_y = a'_y \\ a_z = a'_z \end{cases} \quad (12-3a)$$

写成矢量式为

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} \quad (12-3b)$$

从式(12-3b)可知, 同一物体在不同惯性参考系中的加速度相同, 质点的质量与参考系的选择无关, 即 $m' = m$ 。如在惯性系 K 中牛顿第二定律 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 成立, 那么在惯性系 K' 中牛顿第二定律 $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$ 也必定成立, 牛顿第二定律在不同惯性系中具有相同的表达式, 即力学规律在伽利略变换下具有不变性, 也说明一切惯性系是等价的。由上面的分析可得 $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$, 即在不同惯性系中, 测得同一物体所有力都是相同的。由于每一个力总是与其反作用力同时存在, 故牛顿第三定律在不同惯性系中也具有相同的表述形式。从伽利略的坐标变换可以看出 $t = t'$, $\Delta x = \Delta x'$, 伽利略变换就表达了时间和空间测量的绝对性, 反映了经典力学的绝对时空观。由此可见, 力学的相对性原理、绝对时空观、伽利略变换三者是融为一体, 相辅相成的。

12.2 狭义相对论基本原理 洛伦兹变换

12.2.1 狭义相对论基本原理

伽利略变换和经典力学的相对性原理, 在物体低速运动时是符合实际情况的, 在社会实践中取得了很大的成功。然而随着麦克斯韦电磁理论的建立, 涉及高速运动问题时伽利略变换和经典力学相对性原理遇到了困难, 人们开始想尽各种办法克服困难。爱因斯坦则抛弃了绝对时空观和伽利略变换, 另辟蹊径, 提出了两条基本假设, 创立了狭义相对论。

1. 狭义相对性原理

物理定律在一切惯性参考系中都具有相同的数学表达式, 也就是说, 所有惯性系对描述物理现象都是等价的, 或者说在任何惯性系中做任何实验都无法检测到自己相对于其他惯性系的运动。经典力学的相对性原理中认为力学规律在所有惯性系中是等价的, 但是对于电学、磁学、光学等规律则不等价。狭义相对论的相对性原理不同于力学相对性原理, 它是力学相对性原理的推广, 将力学定律推广到力学、光学、电学、磁学等所有物理规律。同时也说明了绝对静止的参考系是不存在的。

2. 光速不变原理

在任何惯性参考系中所测得真空中的光速都是相等的。这个原理说明光速是一个常量,也就是电磁波相对于任何惯性系的速度都是一样的。无论观察者和光源之间如何运动,光源的频率是多少,测得的光速都是一个定值。光速不变原理与伽利略变换是矛盾的,伽利略变换在此不适用,须要建立新的坐标变换公式。

12.2.2 洛伦兹变换

根据狭义相对论,现在须要寻找一组新的时空坐标变换关系,新变换关系必须满足:
①狭义相对性原理和光速不变原理;②当物体的运动速度远小于真空中光速时,新变换关系要能退回到伽利略变换。

爱因斯坦根据狭义相对论的两条基本原理,对图 12.1 的情况做了进一步的讨论,得到了惯性系 K 和 K' 之间的关系,建立了新的坐标变换公式,即洛伦兹坐标变换(此公式最初由洛伦兹建立,但是他并不知道相对论的思想,而爱因斯坦是给予这些公式正确解释的第一人)。洛伦兹坐标变换为

$$\begin{aligned} \text{正变换} \begin{cases} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - (u/c^2)x}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \end{cases} & \quad \text{逆变换} \begin{cases} x = \frac{x' - ut'}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' - (u/c^2)x'}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \end{cases} \end{aligned} \quad (12-4)$$

其中, c 为真空中光速,式(12-4)称为洛伦兹变换。可以看出, x' 是 x 和 t 的函数, t' 也是 x 和 t 的函数,并且还都与两个惯性系的相对速度 u 有关。洛伦兹变换反映了物质的运动、时间和空间三者紧密相连的关系。而在牛顿力学中,三者是相互独立的、彼此无关的。

当式(12-4)中的 $u \ll c$ 时,洛伦兹变换就退回到伽利略变换,这说明洛伦兹变换对高速运动和低速运动的情况都成立,它包含了伽利略变换,是对伽利略变换的扩展,从而也显示了伽利略变换的局限性。此外,时间和坐标都是实数,这就要求 $1 - (u/c)^2 \geq 0$, 即 $u \leq c$, 这就说明任何物体的速度不能超过真空中的光速,即真空的光速是物体运动速度的极限。现代物理实验中的高能粒子的速度也是以光速为极限的。

12.2.3 洛伦兹速度变换式

由力学知识可知,在 K 系和 K' 系中的速度分别为 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 和 $\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}$, 根据洛伦兹坐标变换式(12-4)可得洛伦兹速度变换公式(相对论速度变换公式)为

$$\text{正变换} \begin{cases} v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - u}{1 - (u/c^2)v_x} \\ v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - (u/c^2)v_x} \\ v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - (u/c^2)v_x} \end{cases} \quad \text{逆变换} \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{v'_x + u}{1 + (u/c^2)v'_x} \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{v'_y \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + (u/c^2)v'_x} \\ v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{v'_z \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + (u/c^2)v'_x} \end{cases} \quad (12-5)$$

其中, v_x, v_y, v_z 是物体相对于 K 系的速度, v'_x, v'_y, v'_z 物体相对于 K' 系的速度, u 是 K' 系相对于 K 系的速度。与洛伦兹坐标变换不同, 在垂直于 x 轴方向的 y 轴、 z 轴方向的速度分量也有相对论效应, 这是因为洛伦兹坐标变换中 K' 系中的时间 t' 不仅与 K 系中的时间 t 有关, 还与 K 系中的空间坐标 x 有关。

由式 (12-5) 知, 当 $u \ll c$, 洛伦兹速度变换式退回到伽利略速度变换式。洛伦兹变换式即适用于高速运动的情况也适用于低速运动的情况。此外, 如果在 K' 系中沿 Ox' 方向发射一光信号, 即 $v'_x = c$ 。根据式 (12-5), 在 K 系测得光信号的速度为 c , 这说明了洛伦兹速度变换式遵从光速不变原理。

例 12-1 一原子核以 $0.5c$ 的速度离开观察者。原子核在它运动方向上向前发射一电子, 该电子相对于核的速度为 $0.8c$; 此原子核又向后发射了一光子指向观察者, 如图 12.2 所示。对静止观察者而言, ①电子具有多大的速度? ②光子具有多大的速度?

解 以实验室为 K 系, 以原子核为 K' 系, 则 K' 系相对 K 的速度为 $u = 0.5c$,

① 电子相对 K' 系的速度为 $v'_x = 0.8c$, 电子相对 K 系的速度大小为 v_x , 有

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} = \frac{0.8c + 0.5c}{1 + \frac{0.5c}{c^2} \times 0.8c} = 0.93c$$

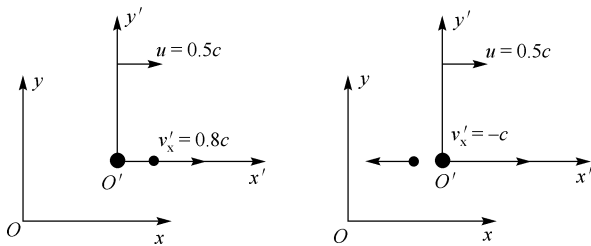


图 12.2 例 12-1 图

② 光子相对 K' 系的速度为 $v'_x = -c$, 光子相对 K 系的速度大小为 v_x , 有

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} = \frac{-c + 0.5c}{1 + \frac{0.5c}{c^2} \times (-c)} = -c$$

从该题可以看出, 光速相对于任何惯性参考系都是不变的。

12.3 狭义相对论的时空观

相对论突破了经典力学的绝对时空观，提出了新的时空观。新的时空观认为：时间和空间是相对的，它们的量度与参考系的选择有关。

12.3.1 同时性的相对性

狭义相对论认为：若两个事件在惯性系 K 中观察是同时发生的，而在惯性系 K' 观察就不一定是同时发生的。

若两个惯性参考系 K 系和 K' 系， K' 系相对于 K 系在 Ox 方向以速度 u 运动。设在 K 系中观测到两事件同时发生，且它们的时空坐标分别为 (x_1, y_1, z_1, t_1) 和 (x_2, y_2, z_2, t_1) 。在 K' 系中观测到同样的两事件发生的时空坐标分别为 (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) 和 (x'_2, y'_2, z'_2, t'_1) 。根据洛伦兹变换关系可得，在 K' 系中观测到两事件发生的时刻为

$$t'_1 = \frac{t_1 - (u/c^2)x_1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \quad \text{和} \quad t'_2 = \frac{t_1 - (u/c^2)x_2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

以上两式相减得到两事件发生的时间间隔为

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{-(u/c^2)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \quad (12-6)$$

从式 (12-6) 可知，若 $x_2 - x_1 = 0$ ，即两事件发生在 K 系中同一 x 坐标（同一地点），则 $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 0$ ，即在 K' 系中观测到两事件也是同时发生的。若 $x_2 - x_1 \neq 0$ ，即两事件在 K 系中发生在不同地点，则 $\Delta t' = t'_2 - t'_1 \neq 0$ ，即在 K' 系中观测到两事件并不是同时发生的。从式 (12-6) 可以看出，在洛伦兹变换下，同时不是绝对的，而是相对的。即两事件发生的先后顺序在不同惯性系中，有可能颠倒。但是请注意，具有因果关系的事件，其先后次序不能颠倒。只有没有因果关系的各个事件之间，先后次序才有可能颠倒。例如打靶，是子弹先出膛，然后才是子弹中靶。当 $u \ll c$ 时， $\Delta t' = \Delta t$ ，即在低速运动时，在 K 系观测到两事件同时发生，在 K' 系观测到两事件也是同时发生。

12.3.2 时间膨胀

狭义相对论认为：时间间隔不是绝对的，而是相对的，与物体的运动有关。

若两个惯性参考系 K 系和 K' 系， K' 系相对于 K 系在 Ox 方向以速度 u 运动。设两事件发生在 K' 系中的同一地点，即 $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = 0$ 。两事件的时间间隔用相对于 K' 系静止的时钟去测量得到 $\Delta t' = t'_2 - t'_1 \neq 0$ 。 $\Delta t'$ 为相对于事件发生地点是静止的参考系中测得的时间间隔，称为固有时间，一般用 t_0 表示。若在 K 系中去测量 K' 系中两事件的时间间隔为 Δt ，

根据洛伦兹变换可得

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

$$\Delta t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \quad (12-7)$$

从式(12-7)可知,相对于事件发生地点运动的观察者测出的时间比相对于事件发生地点静止的观察者测出的时间(称为固有时间或原时)要长一些(时间膨胀),即在一切时间测量中,原时最短。每个惯性系中的观测者都会认为相对自己运动的钟比自己的钟走得慢(动钟变慢),即动钟变慢或时间膨胀效应是相对的。应注意,在分析时间延缓效应时要弄清楚哪个参考系中的时钟测得的时间间隔是固有时。此外,时钟延缓效应完全来自于相对性时空效应,与不同惯性系中的结构和运转无关,把它们放在同一惯性系中,则完全一样。当 $u \ll c$ 时, $\Delta t' = \Delta t$, 即在低速运动时,时间的测量与惯性系无关,回到了牛顿绝对时空观。

12.3.3 长度收缩

狭义相对论认为:空间间隔不是绝对的,而是相对的,与物体的运动有关。

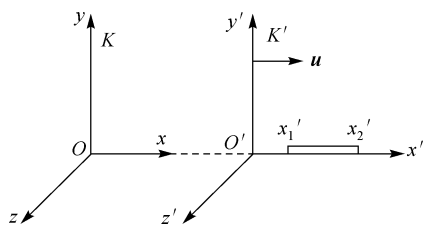


图 12.3 长度的收缩

如图 12.3 所示,设两个惯性参考系 K 系和 K' 系, K' 系相对于 K 系在 Ox 方向以速度 u 运动。设有一刚性棒,相对于 K' 系静止(读者可以讨论棒相对于 K 系静止的情况),沿 x 轴方向放置。在 K' 系中去测得棒两端的坐标是 x'_1 、 x'_2 , 则棒的长度为 $l_0 = x'_2 - x'_1$, 此长度为棒的固有长度。即在相对于物体静止的参考系中测量的长度是物体的原长,也称为固有长度。在 K 系中观察,棒是沿 x 轴方向运动的。在 K 系中同时(即 $t_2 - t_1 = 0$)去测量棒两端的坐标分别为 x_1 , x_2 , 则棒的长度为 $l = x_2 - x_1$ 。由洛伦兹变换关系可得

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - (u/c)^2} \quad (12-8)$$

此外,从式(12-4)可知, $y = y'$, $z = z'$, 即在与速度 u 垂直的方向上,物体的长度不发生变化。从(12-8)式可知,运动的棒比静止的棒的长度要短,但在与速度垂直的方向上物体的长度不变,这就是长度收缩。也就是说,与棒有相对运动的观察者测得棒的长度 l 要比与棒相对静止的观察者测得棒的长度 l_0 要短。物体沿运动方向长度缩短,原长最长。每个惯性系中的观测者都会认为相对自己运动的尺寸比原长小(动尺缩短),即动尺缩短或长度收缩效应是相对的。长度收缩效应是一种相对论效应,反应的是客观的空间性质,与棒的具

体物质结构以及测量棒的标准刻度等无关。当然,长度收缩效应必导致物体体积、密度等物理量的变化。当 $u \ll c$ 时, $l = l_0$, 即空间的测量与参考系无关, 又回到了牛顿绝对时空观。

12.3.4 经典时空观与相对论时空观的比较

经典力学认为: 时间是绝对的。两事件在惯性系 K 中观察是同时发生的, 在另一惯性系 K' 中观察也是同时发生的。狭义相对论则认为: 若两个事件在惯性系 K 中观察是同时的, 而在惯性系 K' 观察则不一定是同时发生的。

经典力学认为: 时间间隔的测量是绝对的。在不同惯性参考系中去测量同一事件发生的时间间隔是相同的。狭义相对论认为: 时间间隔不是绝对的, 而是相对的, 与物体的运动有关。相对事件发生地点运动的观察者测出事件发生时间间隔比相对事件发生地点静止的观察者测出的时间间隔要长。

经典力学认为: 空间间隔的测量是绝对的。在不同惯性系中去测量同一物体的长度, 测量结果是相同的。狭义相对论认为: 空间间隔不是绝对的, 而是相对的, 与物体的运动有关。在相对于物体运动的参考系中去测量物体的长度比在相对于物体静止的参考系中去测量物体的长度要短。

例 12-2 有一种基本粒子叫 μ 子, 在实验室中静止的 μ 子从产生到衰变之间的时间间隔 (称为平均寿命) 为 $\tau_0 = 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$ 。宇宙线中也有这种 μ 子, 它们是在距离地面 10 km 的高空由初级宇宙线同原子核相互作用产生的 π 介子衰变出来的, 这种 μ 子的速度为 $u = 0.998c$, 问地面观测站能否检测到它们?

解 按照经典力学, 即使 μ 子以光的速度前进, 在其有限的寿命内也只能运动 $\tau_0 c = 660 \text{ m}$, 地面观测站根本检测不到它们。

但是按照相对论, τ_0 是固有时间, μ 子高速运动时, 以地面为参考系, 则它的寿命变长, 为

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

在衰变前运动的距离为

$$l = \tau \times 0.998c \approx 10 \text{ km}$$

它们在衰变之前能到达地面。实际上, 在地面观测站也确实观测到了许多 μ 子, 这说明“运动的时钟变慢了”。

例 12-3 在 K 系中有一静止的正方形, 其面积为 100 m^2 , 观察者 K' 以 $0.8c$ 的速度沿正方形的对角线运动, K' 测得的该面积是多少?

解 设正方形在 K 系中每边长为 L , 其对角线长为 $\sqrt{2}L$, 因为相对运动, 沿着运动方向的对角线缩短, 垂直于运动方向的对角线长度不变。

沿运动方向对角线的长度为

$$L' = \sqrt{2}L\sqrt{1-v^2/c^2}$$

固在 K' 系观测的面积为

$$S = \frac{\sqrt{2}LL'}{2} = L^2\sqrt{1-(v/c)^2} = 60 \text{ m}^2$$

*12.3.5 狭义相对论的相关实验

1. 迈克尔逊-莫雷实验

在光的电磁理论发展过程中, 有人认为光是靠“以太”传播的, 且把“以太”选作绝对静止的参考系。为了寻找这种绝对静止的“以太”参考系, 1887 年迈克尔逊和莫雷设计了一个著名的实验。他们认为, 如果存在以太并完全不为地球运动所带动, 那么地球对于以太的运动速度就是地球的绝对速度。他们制造了一台超干涉仪, 如图 12.4 所示。单色光从光源 S 发出, 经半镀银玻片 P 分成两束, 一束透过 P 向右, 被反射镜 M_1 反射折回到 P , 再被 P 反射后进入望远镜 E ; 一束被 P 射向上, 被 M_2 反射折回, 再透过 P 后也进入望远镜 E 。 l_1 和 l_2 分别为干涉仪的两个彼此垂直的“臂”的长度, 整个装置浮在一个水银槽上, 可以在水平面内平稳地转动, 并保持光程 $PM_1 = PM_2$ 固定不变。设地球相对于绝对参考系

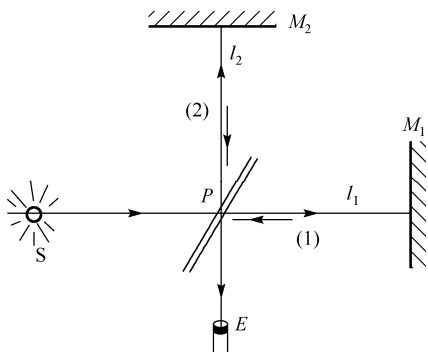


图 12.4 迈克尔逊-莫雷实验原理图

的速度为 v , 且使 $l_1 = l_2$, 则光束 (1) 沿 PM_1 与 v 平行, 光束 (2) 沿 PM_2 与 v 垂直。可以证明:

光束 (1) 沿 PM_1 来回时间为

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v}$$

光束 (2) 沿 PM_2 来回时间为

$$t_2 = \frac{2l}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

并有 $\Delta t = |t_2 - t_1| = lv^2/c^2$, 然后把整个仪器转动 90°

使其另一光臂沿地球运动方向, 利用地球的绝对运动速度和光速在方向上的不同, 即上述光束经历的路线正好相反, 则 t_1 和 t_2 时间值正好相反。因而, 在转动过程中就能从望远镜中观察到干涉条纹的移动。从而求得地球相对于以太的绝对速度。

但是, 迈克尔逊和莫雷在不同地理条件、不同季节条件下进行多次实验, 却始终没能观察到干涉条纹的移动。该实验本来是用来验证以太参考系的存在, 结果却成为否定以太参考系的证据。但是因在实验设计方面的突出贡献获得了诺贝尔奖。

2. 菲索流水实验^①

1859 年, 菲索做了一个流水实验, 实验的目的是为了考察介质的运动对在其中传播的光速有何影响, 从而判断以太是否被拖拽, 实验装置如图 12.5 所示。光源 S 发出的光在半透镜 B 处因发射和折射分成两束, 一束光与水流方向一致, 一束光与水流方向相反, 两束光在观察者处相遇, 相遇的时间差为

$$\Delta t = \frac{2l}{\frac{c}{n} - kv} - \frac{2l}{\frac{c}{n} + kv}$$

考虑到 $v \ll c$, 上式可写为

$$\Delta t \approx 4kv \ln^2 / c^2$$

其中, c 为真空中光速, n 为以太折射率, c/n 是光相对于以太的速率; k 为以太被流水拽引的拽引系数, $k=0$ 表示不被拖动, $k=1$ 表示完全被拖动, $0 < k < 1$ 表示部分被拖动; v 表示水流速率, kv 是以太相对于地面的速率; l 为水管的长度。

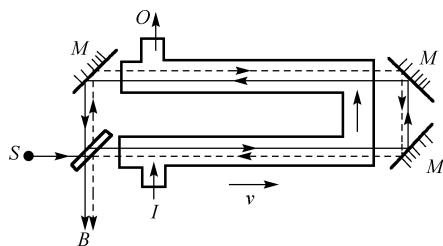


图 12.5 菲索实验原理图

如果水流动, 则两束光相遇有时间差, 有时间差就意味着两束光有相位差。两束有相位差的相干光相遇就会出现干涉条纹, 根据干涉条纹又可以推导出 k 值。菲索实验的确能看到干涉条纹从而推导出 k 的值, 从而认为以太确实被拖拽。这个实验也成了证实以太存在的重要依据。

与以太有关的实验还有布雷德利星光偏差的观测和特劳顿-诺伯的实验。“迈克尔逊-莫雷实验和特劳顿-诺伯实验似乎证明了不可能观测到相对于以太的运动, 而菲索流水试验和布雷德利星光偏差实验则似乎与以太静止说相符。这种以太似静止又被拖拽的情形, 实在令人完全无法满意。”^②

12.4 狭义相对论动力学基础

12.4.1 动量与速度的关系

在经典力学中, 根据牛顿第二定律 $F = ma$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $v \rightarrow \infty$ 。即按牛顿定律, 粒子速度可以超过光速, 速度没有上限。但是大量的实验证明物体运动速度的极限是光速。探究究竟, 主要是在经典力学中物体的质量与物体运动的速度无关, 质量是一个常量。此外, 物体高速运动时的时空性质与牛顿力学不同, 对高速运动物体的运动规律也必然要做相应的改变。因此在狭义相对论中, 必须对牛顿第二定律 ($F = ma$) 的数学表达式做合理

① 参考漆安慎, 杜婵英. 普通物理学教程. 高等教育出版社, 1997.

② 参考吴大猷. 理论物理 (第四册) 北京: 科技出版社, 1983.

的修改。修改的原则就必须满足狭义相对性原理和光速不变原理,以及当运动速度远小于真空光速时,牛顿第二定律的数学表达式也能退回到经典力学。

考虑到动量守恒是自然界中的普遍规律,在相对论中也成立,在洛伦兹变换下应该保持不变,并运用相对论速度变换关系,从理论上推导(证明略)出物体的质量随速度变化的关系式为

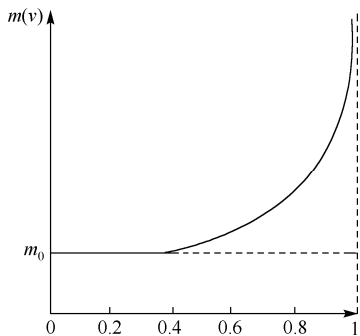


图 12.6 物体的质量随速度的变化

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (12-9)$$

式中, m_0 是相对与物体静止时测出的质量,叫做静止质量; m 是物体对观测者有运动速度时测出的质量,叫做相对论质量。式(12-9)揭示了物体质量与速度的关系,从而说明物质与运动是不可分割的。物体质量随物体速度发生变化在实验中也得到了证实,如图 12.6 所示。

当物体的运动速度 $u \rightarrow c$ 时,物体的质量 $m \rightarrow \infty$,即不论对物体加多大的力,也不可能使物体的速度增加;当物体运动的速度 $v \ll c$ 时,物体的质量 $m \approx m_0$,则退回到了经典力学。

在相对论中,动量的表达式则修正为

$$\mathbf{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \mathbf{v} \quad (12-10)$$

根据式(12-10),在狭义相对论中,力学的运动方程就必须改写为

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \mathbf{v} \right) \quad (12-11)$$

这就是狭义相对论力学的基本方程。式(12-11)在洛伦兹变换下具有不变性。此外,这一方程就能保证物体在恒力持续作用下,物体的速度也不会超过光速。

12.4.2 质量与能量的关系

根据狭义相对论力学的运动方程(见式(12-11))来推得狭义相对论中的动能表达式。设一粒子在变力 \mathbf{F} 作用下相对于某惯性系由静止开始运动,当速度变为 \mathbf{v} 时,物体的动能增加 E_k ,则力 \mathbf{F} 在这个过程中做的元功为

$$\begin{aligned} dA = dE_k &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} = \mathbf{v} \cdot (v dm + m dv) \\ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= v^2 dm + m dv \end{aligned} \quad (12-12)$$

由式(12-9)质量与速度的关系式可得

$$m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2$$

将上式两边微分得

$$c^2 dm = v^2 dm + mvdv$$

将上式代入式 (12-12) 得

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= c^2 dm \\ E_k &= \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{m_0}^m c^2 dm \\ E_k &= mc^2 - m_0 c^2 \end{aligned} \quad (12-13)$$

其中, E_k 为粒子相对论动能。令 $E_0 = m_0 c^2$ 为粒子的静止能量, $E = mc^2$ 为粒子运动时的总能量, 粒子的动能 E_k 则为粒子的总能量减去静止能量。

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (12-14)$$

式 (12-14) 为物体的质能关系式, 它揭示了质量和能量是不可分割的, 表明了质量是物体所含能量的量度。即一定质量对应一定的能量, 即使是物体处于静止状态也具有 $E_0 = m_0 c^2$ 的能量。读者不能把式 (12-14) 理解为质量和能量可以互相转化, 而应该理解为质量和能量是物质不可分割两个基本属性。质量可以通过物体的惯性和万有引力表现出来, 能量则可以通过物质系统状态变化时对外做功、传递热量等形式表现出来。质量和能量虽然在表现方式上有所不同, 但是两者是不可分割的, 任何质量的改变都伴随着能量的改变。如在原子核反应时会出现静止质量减少的现象, 叫质量亏损。由质能关系可知, 此时静止的能量会减少, 减少部分的能量则转化为反应后粒子所具有的动能, 而粒子的动能又可以通过适当的方式转变为其他形式的能量释放出来。当 $u \ll c$ 时, 物体的相对论动能过渡到经典的动能 $E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$, 于是又回到了经典力学。

12.4.3 能量与动量的关系

作为粒子运动的两种量度, 动量和能量有着密切的联系。将式 (12-9) 变形得

$$m^2 c^4 = m^2 v^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

上式可写为

$$E^2 = E_0^2 + (cp)^2 \quad (12-15)$$

式 (12-15) 即为动量和能量的关系, 它反应了能量和动量的不可分割与统一性, 就像时间、空间和物质的运动不可分割一样。当 $v = c$ 时, $m_0 = 0$, 说明了当以光速运动的粒子在其静止时质量为零, 光子即为这样的粒子。它的静止质量为零, 且只能以光速运动。这又从另一个角度说明了一切静质量不为零的物体不可能以光速运动, 光速是所有静质量不为零的物体运动速度的极限。光子的能量、动量、质量分别为

$$E = pc, \quad p = \frac{E}{c}, \quad m = \frac{E}{c^2}$$

例 12-4 一静止质量为 m_0 的粒子, 裂变成两个粒子, 速度分别为 $0.6c$ 和 $0.8c$. 求裂变过程的静质量亏损和释放出的动能。

解 孤立系统在裂变过程中释放出动能, 引起静能减少, 相应地静止质量减少, 即静质量亏损. 设裂变产生两个粒子的静质量分别为 m_{10} 和 m_{20} , 其相应的速度为 $v_1 = 0.6c$, $v_2 = 0.8c$, 由于孤立系统中所发生的任何过程都同时遵守动量守恒定律和能(质)量守恒定律, 所以有

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \frac{m_{10}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} v_1 + \frac{m_{20}}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} v_2 = 0$$

$$m_1 + m_2 = \frac{m_{10}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_{20}}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = m_0$$

注意, m_1 和 m_2 必沿相反方向运动, 动量守恒的矢量方程可以简化为一维标量方程, 再将 $v_1 = 0.6c$, $v_2 = 0.8c$ 代入, 将上面两个方程化简为

$$\frac{6}{8} m_{10} = \frac{6}{8} m_{20}, \quad \frac{m_{10}}{0.8} + \frac{m_{20}}{0.6} = m_0$$

将联立以上两式求解可得

$$m_{10} = 0.459 m_0, \quad m_{20} = 0.257 m_0$$

故静质量亏损为

$$\Delta m = m_0 - (m_{10} + m_{20}) = 0.284 m_0$$

由静质量亏损引起静能减少, 即转化为动能, 故放出的动能为

$$\Delta E_k = \Delta m c^2 = 0.248 m_0 c^2$$

例 12-5 静止质量为 m_0 、带电荷量为 q 的粒子, 其初速为零, 在均匀电场 E 中加速, 则经过时间 t 后它所获得的速度是多少? 如果不考虑相对论效应, 它的速度又是多少? 这两个速度之间有什么关系?

解 ① 粒子在电场中受到电场力为

$$F = qE$$

经过时间 t 后它的动量增加为

$$p = \Delta p = \int F dt = Ft = qEt$$

因为

$$p = mv = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v$$

所以

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v = qEt$$

得

$$v = \frac{qEtc}{\sqrt{(m_0c)^2 + (qEt)^2}}$$

② 如果不考虑相对论效应, 则它的速度为

$$a = \frac{F}{m_0} = \frac{qF}{m_0}, v = at = \frac{qFt}{m_0}$$

③ 当 $v \ll c$ 时, 则满足 $p = mv \ll m_0v$, ①的近似值与②相同。

*12.5 广义相对论简介

狭义相对论原理表明, 物理规律在一切惯性系中都具有相同的数学表达式。而现实中要找一个严格的惯性系也是非常困难的, 自然界中也不存在真正的惯性参考系。那么物理规律在非惯性系中的又将如何表述呢? 此外, 狭义相对论无法解释引力作用以什么速度传递, 万有引力定律也不满足洛伦兹变换, 也无法纳入狭义相对论的理论框架。爱因斯坦重新思考上述问题, 将相对性原理推广到了包括非惯性系在内的任意参考系, 进而建立了广义相对性原理。同时也对引力场进行了重新的认识和研究, 建立了等效原理和广义相对性原理。

爱因斯坦把他的引力理论建立在等效原理和广义相对性原理的基础之上。因而称它为广义相对论。这两条原理的内容如下。

(1) 等效原理: 惯性力场与引力场的动力学效应是局部不可分辨的。下面对等效原理做简要说明。

等效原理的实用范围: 等效性仅在局部时空范围 (一个时空点的邻域) 内成立; “等效” 仅仅是针对动力学效应而言的。

通过一个从加速系回到惯性系的坐标变换, 可以把整个空间的惯性力场全部消除, 故惯性力场又叫做非永久力场。

上面所述的等效原理是建立在 $m_g = m_i$ (引力质量等于惯性质量) 实验基础上的, 强调的仅仅是动力学效应。把这个概念进行推广, 用 “任何物理效应” 代替 “动力学效应”, 则等效原理就表述为: 引力场中任一时空点, 当采用局部惯性系时, 除引力外的一切物理学规律是洛伦兹协变的。这是广义相对论的理论基础。

等效原理保证了一切物体在引力场中有完全相同的运动方程, 也就是说运动轨道仅取决于时空的几何性质, 而与物质的属性无关。

惯性力与引力的另一显著不同点是, 引力起源于相互作用, 它有场源, 也有反作用力。而惯性力不是起源于相互作用, 没有场源也没有反作用力。

(2) 广义相对性原理: 一切参考系都是平权的。换言之, 客观真实的物理规律应该在任意坐标变换下保持形式不变——广义协变性。

该原理可以看出以下两点:

- ① 等效原理与广义相对性原理取消了惯性系的优越地位, 使一切参考系都平权;
- ② 一个正确的物理规律必须考虑引力场的影响。

须说明: 等效原理和广义相对性原理这两条基本原理是彼此独立而又相互联系的。它们共同构成了广义相对论基础。进一步的研究可参阅相关文献与书籍。

12.5.1 光线在引力场中的弯曲

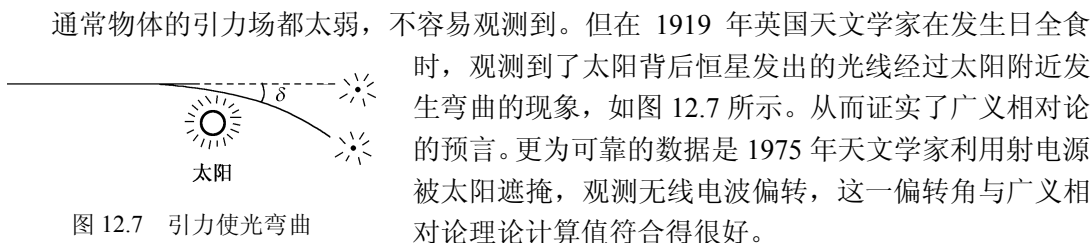


图 12.7 引力使光弯曲

光线在引力场中弯曲的一个必然推论是引力透镜成像问题。即星球的强引力场能使背后传来的光线会聚, 这种现象叫做引力透镜效应。宇宙中很可能存在引力场极强的天体——黑洞。它巨大的质量和极小的体积使其附近产生极强的引力场, 电磁波全部在极强的引力场作用下会聚于黑洞, 不向外辐射, 因此无法直接观测到。但是引力透镜则是探索黑洞的途径之一。

12.5.2 水星轨道近日点的进动

水星沿椭圆轨道绕太阳运动, 每公转一周椭圆轨道的长轴与上一个周期偏转相比要偏转一个角度, 该现象称为水星轨道的进动, 如图 12.8 所示。在理论上对其研究, 将其他行星对它的影响计算在内, 运用牛顿定律计算出的结果与实际结果不符合。考虑到水星距离太阳很近时, 太阳的巨大质量使它周围的空间发生弯曲, 用广义相对论计算的结果与实际结果符合得很好, 对水星轨道之谜给出了解释。该现象早在广义相对论出现之前就已经发现, 只是无法解释。它是广义相对论初期重大验证之一。

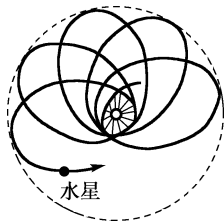


图 12.8 水星轨道近日点的进动

12.5.3 光谱线的引力红移

广义相对论指出, 在引力场附近, 不仅空间发生弯曲, 时间也要发生弯曲。即, 引力场的存在使得空间不同位置的时间进程出现差别, 在强引力的星球附近, 时间进程会变慢。如宇宙中有一类恒星, 体积很小, 质量却很大, 叫做矮星, 其引力场非常强。矮星表面的

时间进程较慢,在那里发光的频率比同种的原子在地球上发光频率低。现代物理实验已观测到太阳甚至地球引力造成的微小红移,与广义相对论的预言符合得很好。

广义相对论的另一个重要预言是引力波,像加速运动的电荷辐射电磁波一样,加速运动的质量也辐射引力波,因此损失质量和能量。对脉冲双星的观测证实了这个预言。

广义相对论是关于引力、时间、空间的理论。它揭示了时间和空间以及时空性质和运动物质之间的相互联系,它主要应用于天体物理学中。相对论是物理发展中的一个台阶,它未能包含微观世界规律,未能揭示时间箭头的物理意义,它不能穷尽地表达各层次事物间的相互联系和作用方式,相对论也不是终极理论。

本章提要

1. 狭义相对论基本假设

狭义相对性原理:物理定律在一切惯性参考系中都具有相同的数学表达式。

光速不变原理:在任何惯性参考系中所测得真空中的光速都是相等的。

2. 洛伦兹坐标变换式和速度变换

$$\begin{array}{l} \text{坐标变换} \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - (u/c^2)x}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{速度变换} \left\{ \begin{array}{l} v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - u}{1 - (u/c^2)v_x} \\ v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - (u/c^2)v_x} \\ v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - (u/c^2)v_x} \end{array} \right. \end{array}$$

3. 狭义相对论的时空观

(1) 同时的相对性

在某个惯性系中同时发生的两个事件,在另一相对它运动的惯性系中,并不一定同时发生。

(2) 时间延缓

$$\Delta t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \quad (\text{注意同地条件,即两件事情发生在同一地点。})$$

(3) 长度收缩

$$l = l_0 \sqrt{1 - (u/c)^2} \quad (\text{注意同时条件,即在同一时刻去测量物体的两端。})$$

(4) 相对性与绝对性

时空具有相对性,但是事件的因果关系不会因为参考系的选择发生变化,这也是时空的绝对性。

4. 相对论质量

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

5. 相对论动量

$$p = mv = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} v$$

6. 相对论能量

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

7. 相对论动能

$$E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2$$

式中 $m_0 c^2$ 为质点静止时的相对论能量，称为静能。

8. 相对论动量与能量的关系式

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0 c^2$$

阅读材料

黑 洞^①

根据广义相对论，空间和时间一起被认为形成了被称作时空的四维空间。这个空间不是平坦的，它被在它当中的物质和能量所畸变或者弯曲。在向我们传来的光线或者无线电波于太阳附近受到的弯折中可以观测到这种曲率。在光线通过太阳邻近的情形时，这种弯折非常微小。然而，如果太阳被收缩到只有几英里的尺度，这种弯折就会厉害到这种程度，即从太阳表面发出的光线不能逃逸出来，它被太阳的引力场拉拽回去。根据相对论，没有东西可以比光旅行得更快，这样就存在一个任何东西都不能逃逸的区域。这个区域就叫做黑洞。它的边界称为事件视界。它是由刚好不能从黑洞逃出而只能停留在边缘上徘徊的光线形成的。

假定太阳能收缩到只有几英里的尺度，听起来似乎是不可思议的。人们也许认为物质不可能被压缩到这种程度。但是在实际上这是可能的。

^① 摘自《霍金演讲录》。

太阳具有现有的尺度是因为它是热的。它正在把氢燃烧成氦，如同一颗受控的氢弹。这个过程中释放出的热量产生了压力。这种压力使太阳能抵抗得住自身的引力，正是这种引力使得太阳尺度变小。

然而，太阳最终会耗尽它的燃料。这要发生也是在再过大约五十亿年以后的事，所以不必焦急订票飞到其他恒星去。然而具有比太阳更大质量的恒星会更迅速地耗尽其燃料。在燃料耗尽后就开始失去热量并且收缩。如果它们质量比大约太阳质量的两倍还小，就会最终停止收缩，并且趋向于一种稳定的状态。这样的状态之一叫做白矮星。它们具有几千英里的半径和每立方英寸几倍吨的密度。另一种这样的状态是中子星。它们具有大约十英里的半径和每立方英寸几百万吨的密度。

在银河系我们紧邻的区域观测到大量的白矮星。然而，直到 1967 年约瑟琳·贝尔和安东尼·赫维许在剑桥才首次观测到中子星。那时他们发现了脉冲星的发出射电波规则脉冲的物体。最初，他们惊讶是否和外星文明进行了接触。我的确记得，在他们要宣布其发现的房间装饰了“小绿人”的图样。然而，他们和所有其他人最后只能得出不太浪漫的结论，这些物体原来是旋转的中子星。对于写太空西部人的作家，这个是坏消息，而对于当时相信黑洞的少数人，却是好消息。如果恒星能够缩小到十至二十英里的尺度，而变成中子星，人们便可以预料，其他恒星能进一步收缩而变成黑洞。

质量比大约太阳质量两倍更大的恒星不能稳定称为一颗白矮星或中子星。在某种情形下，该恒星可以爆炸，并抛出足够的质量，使余下的质量低于这个极限。但是总有例外，有些恒星会变得这么小，它们的引力场会把光线弯折到这种程度，使它折回到恒星本身上去。不管是光线还是别的任何东西都不能逃逸出来。该恒星已经变成一颗黑洞。

物理定律是时间对称的。如果存在东西能落进去而不能跑出来的叫做黑洞的物体。那就还应该存在东西能够跑出来而不能落进去的其他物体。人们可以把这些物体叫做白洞。人们可以猜测，一个人可以在一处跳进一颗黑洞，而在另一处从一颗白洞跑出来。这应该是早先提到的长距离空间旅行的理想手段。你所需要做的一切是去寻找一颗邻近的黑洞。

这种形式的空间旅行初看来是可能的。爱因斯坦的广义相对论中存在这类解，它允许人往一颗黑洞落进黑洞再从一颗白洞跑出来。然而，后来的研究表明，所有这些解都是非常不稳定的：最为微小的扰动，譬如讲空间飞船的存在都会被无限强大的力量撕得粉碎。这正如同躲藏在大桶里从尼亚加拉瀑布漂下去一样。

习题

12.1 有一直尺固定在 K' 系中，它与 Ox' 轴的夹角为 45° ，如果 K' 系以匀速度沿 Ox 正方向相对于 K 系运动，则 K 系中观察者测得该尺与 Ox 轴的夹角_____ 45° （选填“大于”、“小于”、“等于”）。

12.2 设某微观粒子的总能量是它的静止能量的 k 倍, 则其运动速度的大小为 (以 c 表示真空中的光速) _____。

12.3 宇宙飞船相对于地面以速度 v 做匀速直线运动, 某一时刻飞船头部的宇航员向飞船尾部发出一个光信号, 经过 Δt (飞船上的钟) 时间后, 被尾部的接收器收到, 则由此可知飞船的固有长度为 _____。

12.4 一火箭的固有长度为 L , 相对于地面做匀速直线运动的速度为 v_1 , 火箭上有一个人从火箭的后端向火箭前端的一个靶子发射一颗相对于火箭的速度为 v_2 的子弹。

① 在火箭参考系中测得子弹从射出到击中靶的时间间隔是 _____;

② 在地面参考系中测得子弹从射出到击中靶的时间间隔是 _____。

12.5 某种介子静止时的寿命为 10^{-8} s, 质量为 10^{-25} g。若它在实验室中的速度为 2×10^8 m/s, 则它的一生中能飞行 _____ m。

12.6 静止时边长为 50 cm 的立方体, 当它沿着与它的一个棱边平行的方向相对于地面以匀速 2.4×10^8 m/s 运动时, 在地面上测得它的体积是 _____。

12.7 一门宽为 a , 今有一固有长度为 l_0 ($l_0 > a$) 的水平细杆, 在门外贴近门的平面内沿其长度方向匀速运动。若站在门外的观察者认为此杆的两端可同时被拉进此门, 则该杆相对于门的运动速率 u 至少为 _____。

12.8 观察者甲以 $4c/5$ 的速度相对于静止的观察者乙运动, 若甲携带一长度为 l 、截面积为 S , 质量为 m 的棒, 这根棒安放在运动方向上, 则甲测得此棒的密度为 _____; 乙测得此棒的密度为 _____。

12.9 令电子的速率为 v , 则电子的动能 E_k 对于比值 v/c 的图线可用图 12.9 中哪一个图表示?

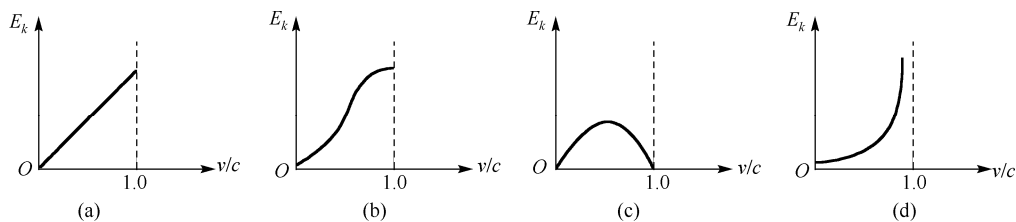


图 12.9 习题 12.9 图

12.10 某核电站年发电量为 100 亿度, 等于 3.6×10^{16} J 的能量, 如果这是由核材料的全部静止能转化产生的, 则需要消耗的核材料的质量是多少?

12.11 边长为 a 的正方形薄板静止于惯性系 K 的 XOY 平面内, 且两边分别与 X 轴、 Y 轴平行, 今有惯性系 K' 以 $0.8c$ (c 为真空中光速) 的速度相对于 K 系沿 X 轴做匀速直线运动, 则从 K' 系测得薄板的面积是多少?

12.12 两个事件分别由两个观察者 K 、 K' 观察, K 、 K' 彼此相对做匀速运动, 观察

者 K 测得两事件相隔 3 s ，两事件发生地点相距 10 m ，观察者 K' 测得两事件相隔 5 s ， K' 测得两事件发生地的距离最接近于多少米？

12.13 火箭相对于地面以 $0.6c$ （ c 为真空中光速）的匀速度向上飞离地球。在火箭发射 10 s 后（火箭上的钟），该火箭向地面发射一导弹，其速度相对于地面为 $0.3c$ ，问火箭发射后多长时间（地球上的钟），导弹到达地球？计算中假设地面不动。

12.14 一匀质矩形薄板，在它静止时测得其长为 a ，宽为 b ，质量为 m_0 ，由此可推算出其面积密度为 m_0/ab ，假定该薄板沿长度方向以接近光速的速度 v 做匀速直线运动，此时再测算该矩形薄板的面积密度为_____。

12.15 在参照系 K 中，有两个静止质量都为 m_0 的粒子 A 和 B ，分别以速 v 沿同一直线相向运动，相碰后合在一起成为一个粒子，则其静止质量 m_0 的值为多少？

12.16 K 系与 K' 系是坐标轴相互平行的两个惯性系， K' 系相对于 K 系沿 Ox 轴正方向匀速运动，一根刚性尺静止在 K' 中，与 $O'x'$ 轴成 30° 角，今在 K 系中观察得该尺与 Ox 轴成 45° 角，则 K' 系相对于 K 系的速度是多少？

12.17 飞船 A 中的观察者测得飞船 B 正以 $0.4c$ 的速率尾随而来，一地面站测得飞船 A 的速率为 $0.5c$ ，求：①地面站测得飞船 B 的速率；②飞船 B 测得飞船 A 的速率。

12.18 一短跑选手，在地球上以 10 s 时间跑完 100 m ，在飞行速度为 $0.98c$ 的飞船中的观察者观察，该选手跑了多长时间和多长距离？

12.19 在惯性系 K 中，有两事件发生于同一地点，且第二事件比第一事件晚发生 $\Delta t = 2\text{ s}$ ；而在另一惯性系 K' 中，观测第二事件比第一事件晚发生 $\Delta t' = 3\text{ s}$ ，那么在 K' 系中发生两件事的地点之间的距离是多少？

12.20 一正负电子对撞机可以把电子加速到动能 $E_k = 2.8 \times 10^9\text{ eV}$ 。这种电子速率比光速差多少？这样的一个电子的动量是多大？（与电子静止质量相应的能量为 $E_0 = 0.511 \times 10^6\text{ eV}$ 。）

12.21 设某微观粒子的总能量是它的静止能量的 K 倍，则其运动速度的大小为多少？（以 c 表示真空中的光速。）

12.22 甲相对乙以 $0.6c$ 的速率运动，求：①甲携带质量为 1 kg 的物体，乙测得该物体的质量是多少？②甲、乙测得该物体的总能量各是多少？

12.23 一静止质量为 m_0 的粒子，裂变成两个粒子，速度分别为 $0.6c$ 和 $0.8c$ 。求裂变过程的静质量亏损和释放出的动能是多少？

12.24 一物体的速度使其质量增加了 10% ，试问此物体在运动方向上缩短了百分之几？

12.25 一发射台向东、西两侧距离均为 L_0 的两个接收站 E 与 W 发射信号，今有一飞机以匀速度 v 沿发射台与两接收站的连线由西向东飞行，试问在飞机上测得两接收站接收到发射台同一信号的时间间隔是多少？

第 13 章 量子力学基础

量子力学是 20 世纪初在总结大量实验事实和经典量子理论的基础上建立起来的理论，19 世纪末，经典物理学已发展到相当完善的阶段。那时，一般的物理现象都可以从相应的理论中得到解释：对低速物体的机械运动可用牛顿力学理论说明；电磁现象的规律可用麦克斯韦方程描述；光的现象有光的波动理论，最终也可用麦克斯韦方程解释；一般的热现象也有较完整的统计物理学。可以说那时很多物理学家都认为物理学的基本规律已被揭露，今后的任务只是使这些规律进一步地完善，并把物理学的基本定律应用到具体问题的处理上，以及用来说明新的实验工作而已。

但上述这种物理学“最终理论”很快遇到了困惑。1897 年，汤姆孙在对阴极射线实验研究中，发现阴极射线和带负电的粒子在电磁场中走相同的路径。并在进一步的射线粒子荷质比 e/m 的测量中，确定了这种带电粒子与真空管内气体的种类、电极的材料无关。因此，他确定阴极射线是由后来被称为“电子”的粒子组成的。电子的发现揭开了研究原子结构内部的奥秘。但在经典物理中是不能对原子的这种可分性给予正确解释的；1900 年，瑞利（Rayleigh）-琼斯（Jeans）用经典的能量均分定理来说明热辐射时，也出现了所谓的“紫外灾难”；在光电效应实验中，实验表明，只有当光的频率大于一定值（截止频率）时，不管光多微弱，只要光一照射，就有光电子发射出来。如果光的频率低于这个值，则不论光的强度多大，照射时间多长，都没有光电逸出。光电子的能量只与光的频率有关，而与光的强度无关，光的频率越高，光电子的能量就越大。光的强度只影响光电流强度（即单位时间从单位面积上逸出的光电子的数目），强度增大，光电子的数目就增多。对于光电效应的这些特点，经典物理也无法给出合理的解释。为了走出经典物理一系列的困难，一些物理学家重新思考了物理学中的某些基本概念，1900 年普朗克引入能量子的概念解释了黑体辐射规律的困难；1913 年，波尔在卢瑟福原子核模型的基础上，应用新的量子化概念解释了氢原子光谱的规律性。随后，爱因斯坦针对光电效应实验与经典物理理论的矛盾，提出了光量子的假设，并在固体比热容问题上成功地应用了能量子的概念。玻尔理论所遇到的困难表明了探索微观粒子运动规律的迫切性，为了达到这个目的，1924 年，德布罗意（de Broglie）在光的波粒二象性的启示下，提出微观粒子也具有波粒二象性的假说之后，还提出了不确定关系、量子力学波函数、薛定谔方程等新理论。总之，1925 年前后，经大量科学家艰苦而又曲折的努力，终于诞生了量子力学。量子力学诞生后，一些悬而未决的问题很快就得到了解决。

而今，量子力学已成为当代物理学理论中的一大支柱，量子力学有力地推动了科学和

技术（如在激光、半导体、超导体、纳米材料、显微镜技术、化学、生物等技术）的发展。现已证明，对微观高速粒子的研究，牛顿理论已不再适用，必须用新的量子力学理论。

本章只介绍微观粒子运动的基本概念和规律，对于应用量子力学处理实际问题，只介绍一些重要结论，更详细的关于量子力学知识请参考相关文献和书籍。

13.1 黑体辐射 普朗克能量量子假说

13.1.1 黑体辐射 斯特藩-玻耳兹曼定律

在各种温度下，任何物体都能辐射出电磁波，同时吸收外界辐射来的电磁波。所谓黑体是指吸收本领很大的物体，它能全部吸收辐射到它表面上的电磁波，用热力学理论可以证明，黑体的辐射本领也大于其他物体，空腔表面的小孔就是一个理想的黑体模型，如图 13.1 所示。这是因为射入小孔的电磁波，要被腔壁多次反射，每反射一次，壁就要吸收一部分电磁波能量，以致射入小孔的电磁波很少有可能从小孔逃逸出来。也就是说，任何辐射将完全被小孔吸收掉。实际上，此空腔处于某确定的温度时，也有电磁波从小孔发射出来，显然，从小孔发射出来的电磁波就可作为黑体辐射。总之，无论从吸收还是从发射电磁波来看，空腔小孔都可以看作是黑体。实验分析表明：空腔小孔向外辐射的电磁波是含有各种频率成分的，而且不同频率成分的电磁波的强度也不同，随黑体的温度而异。

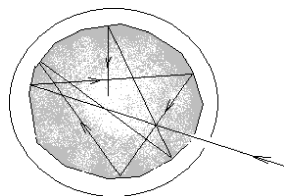


图 13.1 空腔上的小孔可作为黑体

1879 年，黑体热辐射的实验测量了著名的斯特藩（J. Stefan）四次方定律，1884 年，玻耳兹曼（L. Boltzmann）从热力学理论上导出这条定律，因此，称此定律为**斯特藩-玻耳兹曼定律**，表达式为

$$M_u(T) = \sigma T^4 \quad (13-1)$$

式中， $M_u(T)$ 为热辐射的能流通量，也称为辐出度，它定义为单位时间内单位表面积辐射出的各种波长的电磁波能量的总和，它只是黑体温度的函数，其值可由 $M_{u\lambda}(T)$ 对所有波长的积分求得，即

$$M_u(T) = \int_0^\infty M_{u\lambda}(T) d\lambda$$

式（13-1）中的 T 为黑体的热力学温度， σ 为普适量，叫做斯特藩-玻耳兹曼常量，它与构成黑体的材料性质无关，由实验测得其值为

$$\sigma = 5.6704 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

图 13.2 是黑体辐射示意图, 将空腔加热至温度 T , 这时腔内电磁场具有稳定的能量分布 (各种频率的电磁波), 经由小孔 ΔS 辐射出的能流可用仪器 (实验) 测出, 如以 u 表示腔内电磁场能量密度 (单位体积内电磁波能量), c 表示光速, 则单位时间内经由小孔 ΔS 沿 $d\Omega$ 辐射出的能量为

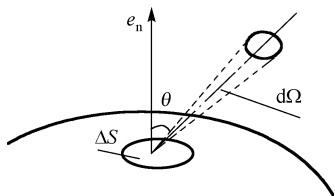


图 13.2 黑体辐射示意图

$$\Delta S \cdot \cos \theta \cdot cu \frac{d\Omega}{4\pi}$$

经由 ΔS 辐射出的总能量为

$$\begin{aligned} M_u \cdot \Delta S &= \int_{\theta \leq \frac{\pi}{2}} \Delta S \cdot \cos \theta \cdot cu \frac{d\Omega}{4\pi} \\ &= \Delta S cu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} cu \Delta S \end{aligned}$$

因此,

$$u = \frac{4}{c} M_u = \frac{4\sigma}{c} T^4$$

热辐射电磁能量密度与温度四次方成正比, 这里比例系数为普适常数。

13.1.2 维恩位移定律

实验还可以测出辐射能量的波长 (频率) 分布。电磁波的波长 λ 与频率 ν 及角频率 $\omega = 2\pi\nu$ 有如下关系:

$$c = \lambda \nu = \frac{\lambda \omega}{2\pi}$$

若以 $\rho(\omega)d\omega$ 表示在波长 $(\omega, \omega + d\omega)$ 间的电磁波能量, 则能量密度 u 按频率的分布可以表示为

$$u = \int_0^{\infty} \rho(\omega) d\omega$$

实验测得各种温度下 u 的波长分布曲线, 如图 13.3 所示。在长波部分 ($\omega \rightarrow 0$), $\rho(\omega) \propto \omega^2 T$; 在短波部分 ($\omega \rightarrow \infty$), $\rho(\omega)$ 随频率 ω 增大而迅速减小。对于每一种温度 $\rho(\omega)$ 都存在一个与极值相对应的角频率 ω_m 与温度 T 成正比, 相应波长 ($\lambda_m = 2\pi c / \omega_m$) 和温度 T 成反比, 亦即随着温度增高, λ_m 向短波方向移动, 其数学表达式为

$$T\lambda_m = b \quad (13-2)$$

式中, $b = 5.1 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ 是一实验常数, 也是普适常数。该规律称为**维恩 (W. Wien) 位移定律**。

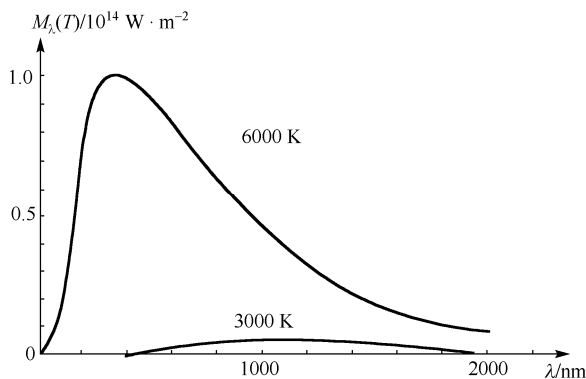


图 13.3 黑体的辐出度按波长分布曲线

黑体辐射定律的发现引起了物理学界的极大关注，吸引了许多学者对它进行深入的理论探讨，并取得了可喜的成果。黑体辐射的规律在现代科学技术上的应用也很广泛，它是测高温、遥感、红外追踪等技术的物理基础。例如，可通过测定星体的谱线的分布来确定其热力学温度；也可通过比较物体表面不同区域的颜色变化情况，来确定物体表面的温度分布，利用这种图形表示出的热力学温度分布称为热象图。利用热象图的遥感技术可以监测森林防火，也可用于医学来监测人体某些部位的病变。又如在高温测量应用中，可根据维恩位移定律，实验测出黑体单色辐出度的最大值所对应的波长 λ_m ，然后可以算出这一黑体的温度，炼钢厂钢水的温度就可利用这一方法测定。若将钢水看作黑体，从钢水光谱测得 λ_m ，由维恩位移定律可算出钢水温度 $T_{\text{Fe}} = b / \lambda_{\text{Fe}}$ 。

13.1.3 黑体辐射的瑞利-金斯公式

图 13.3 曲线反映了黑体的单色辐出度与 λ 、 T 的关系，这些曲线都是实验的结果，因此从理论上研究单色辐出度的数学关系是很有意义的。19 世纪末，经典物理学（牛顿力学、电磁学、热力学和经典统计物理等）已经日臻成熟，许多物理学家都相信经典物理学能够解释各类物理现象，黑体辐射定律也不例外。然而，冷酷的事实却是，企图在经典物理的框架内对黑体辐射的频率分布给出理论说明，结果都在不同程度上遭到了失败，而得出了与实验不相符合的结果。其中最具有代表性的是 1893 年维恩（W.Wien）假设黑体辐射能谱分布与麦克斯韦分子速率分布相类似，从而得出维恩（Wien）公式

$$E(\nu)d\nu = c_1 \nu^3 e^{-c_2 \nu/T} d\nu \quad (13-3)$$

其中 c_1 、 c_2 为常量， $E(\nu)d\nu$ 为辐射能量密度。此维恩公式在短波部分与实验还相符合，长波部分则明显不一致，如图 13.4 所示的维恩线。

还有 1900 年至 1905 年间，瑞利和金斯（Rayleigh-Jeans）按照经典物理求得单位体积内 $(\omega, \omega+d\omega)$ 范围内电磁振动模式总数，它等于 $\omega^2 d\omega / \pi^2 c^3$ 。每一种电磁振动模式

相当于一个简谐振子，在温度 T 下应该具有某种能量，按“能量均分定理”，在温度 T 下简谐振子应该具有平均能量 kT （ k 为玻尔兹曼常数）。瑞利将“能量均分定理”用于热平衡下的电磁场（即热辐射场），从而得出结论：单位体积内 $(\omega, \omega + d\omega)$ 范围内电磁振动能量为

$$\rho(\omega)d\omega = \frac{kT\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega \quad (13-4a)$$

或表示为

$$E(\nu)d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (13-4b)$$

式中， k 为玻尔兹曼常数， c 为光速，该式称为热辐射的**瑞利-金斯公式**。这个公式在长波部分与实验曲线符合得很好，而在短波部分则与实验结果完全不符合，如图 13.4 所示的瑞利-金斯曲线。更为严重的是，当 $\nu \rightarrow \infty$ 时， $E_\nu \rightarrow \infty$ 是发散的。这个结论显然是错误的，这就是历史上的“紫外发散困难”。

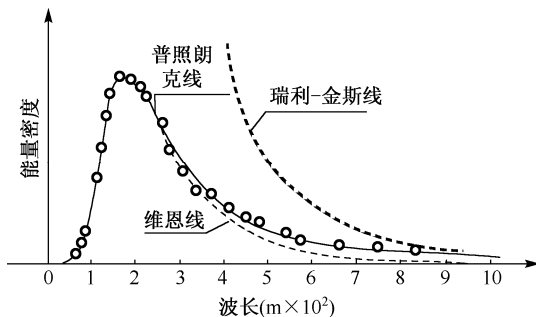


图 13.4 黑体辐射能量分布曲线（圆点为实验曲线）

13.1.4 经典物理的困惑

维恩公式和瑞利-金斯公式都是用经典物理学的方法来研究热辐射所得到的结果，都与实验结果不相符合，明显地暴露了经典物理的缺陷。经历了许多失败，终于使物理学认识到，仅靠经典物理学是不能够解释黑体辐射定律的，必须有一个新的理论。这就是 1900 年普朗克 (M. Planck) 提出的量子论。

13.1.5 普朗克能量量子假说 普朗克公式

普朗克量子论的核心内容是“量子假设”：频率为 ν 的电磁振动和原子、分子等物质发生能量转换时，能量不能连续变化，只能“量子”式地变化，每份“能量”为

$$\varepsilon = h\nu = \hbar\omega, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (13-4)$$

其中 h 是新引入的一个常量，后来称之为普朗克常量，是一个普适量。其 2002 年国际推荐值为

$$h = 6.626\,069\,3(11) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

普朗克在这一假设下，利用热力学和统计物理理论导出了著名的普朗克公式

$$\rho(\omega)d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega \quad (13-5)$$

式中， $\rho(\omega)d\omega$ 是黑体内频率在 $(\omega, \omega + d\omega)$ 之间的辐射能量密度， c 是光速， k 是玻尔兹曼常数， T 是黑体的绝对温度。这个公式在各种温度下，全部频率范围内均与实验曲线精确地吻合，如图 13.4 所示的普朗克线。普朗克的理论突破了经典物理学在微观领域内的束缚。在经典物理学中一切物质的运动变化都是连续的，能量变化也是连续的，这正是导致热平衡下“能量均分定理”的前提条件，普朗克舍弃了“能量均分定理”，代之以“量子假设”，这在概念上是一次革命性的突破。从 (13-5) 的结果可见，由于能量的量子化，角频率为 ω 的每一种电磁振动模式在温度 T 下的平均能量不再取“能量均分定理”下的 kT ，而是

$$\bar{E}_\omega = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

在长波部分或温度很高时， $\hbar\omega \ll kT$ ，则 $e^{\hbar\omega/kT} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT} + \dots$ ，忽略高次项而只取前两项，由上式得到 $\bar{E}_\omega = kT$ ，这时与能量均分定理结论一致。在短波部分或温度较低时， $\hbar\omega \gg kT$ ，由上式给出 $\bar{E}_\omega \approx \hbar\omega e^{-\hbar\omega/kT} \ll kT$ ，这意味着高频振动被“冻结”，很难获得能量，因此避免了“紫外发散困难”。

从普朗克公式还可以推导出由实验得到的斯特藩-玻耳兹曼定律和维恩位移定律。

例 13-1 由黑体辐射公式导出维恩位移定律：能量密度极大值所对应的波长 λ_m 与温度成反比，即

$$\lambda_m T = b$$

并近似计算 b 的数值，精确到两位有效数字。

解 将式 (13-5) 角频率用频率表示，求出能量密度的波长表达形式 $\rho_\nu \rightarrow \rho_\lambda$ 。然后求 ρ_λ 对波长 λ 的一阶导，寻找到 λ_m 从而确定 $\lambda_m T$ 的值。普朗克黑体辐射公式 (13-5) 可改写为

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

考虑波长与频率关系为 $c = \lambda\nu$ ，且由能量密度的定义，温度为 T 的黑体在频率为 ν 到 $\nu + d\nu$ 范围内的能量与在波长 λ 到 $\lambda + d\lambda$ 范围内的能量相等，即

$$\rho_\nu d\nu = -\rho_\lambda d\lambda$$

负号表示 $d\lambda$ 与 $d\nu$ 的符号相反，当 $d\lambda$ 为正时， $d\nu$ 为负，反之亦然，又由于 $\nu = c/\lambda$ ，有

$$\begin{aligned}\rho_\lambda &= -\rho_\nu \frac{d\nu}{d\lambda} = -\rho_\nu(\lambda) \frac{d(c/\lambda)}{d\lambda} \\ &= \frac{\rho_\nu(\lambda)}{\lambda^2} \cdot c \\ &= \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}\end{aligned}$$

这里的 ρ_ν 的物理意义是黑体内波长介于 λ 到 $\lambda + d\lambda$ 之间的辐射能量密度。

现在考虑 λ 取何值时，取得极大值，因此要求 $\frac{d\rho_\lambda}{d\lambda} = 0$ ，由此可求得相应的 λ_m 。注意，还要验证 ρ_λ 对 λ 的二阶导在 λ_m 处的取值是否小于零，如果小于零，那么前面求得的 λ_m 就是所需结果。具体如下：

$$\frac{d\rho_\lambda}{d\lambda} = \frac{8\pi hc}{\lambda^6} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \left(-5 + \frac{hc}{\lambda kT} \cdot \frac{1}{1 - e^{hc/\lambda kT}} \right) = 0$$

化简即有

$$5(1 - e^{hc/\lambda kT}) = \frac{hc}{\lambda kT}$$

上式中，令 $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ ，则

$$5(1 - e^x) = x$$

这是一个超越方程。 $x=0$ 的解已验证是没意义的。另一解用数值计算方法得 $x=4.97$ ，经验证是所需结果，于是有

$$\lambda_m T = \frac{hc}{kx}$$

将 $x=4.97$ 以及 h 、 k 、 c 等常量代入，得

$$\lambda_m T = 2.9 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

这便是维恩位移定律。由此可知，辐射的能量分布的峰值向较短波长方向移动。利用此关系便会根据热物体（如遥远星体）的发光颜色来判定温度的高低。

例 13-2 试由普朗克公式的频率表示 $M_{\nu\nu}(T)$ 换算到用波长表示 $M_{\lambda\lambda}(T)$ 。

解 例 13-1 已给出了证明。

13.2 光电效应 爱因斯坦的光子理论

13.2.1 光电效应

光电效应是由赫兹首先发现的，他在进行电磁实验时注意到，接收电路中感应出来的电火花，当间隙的两个受到光照射时，火花变得更强一些。此后，他的同事勒纳德(P.Lenard)测量了受到光照射的表面所释放的粒子的荷质比，确认了粒子就是电子，从而证实赫兹所观察到的火花加强的现象是在光的照射下金属表面发射电子的效应。

光电效应的实验装置如图 13.5 所示，K 为阴极金属板，当紫外光照射在金属板 K 的表面上时，金属板便释放电子，这种电子称为光电子，如果在 AK 两端加上电势差 U ，则光电子在加速电场作用下，飞向阳极，形成回路中的光电流，光电流的强弱由电流计读出。这种现象就是光电效应。光电效应实验规律可归纳如下：

① 对某一种金属来说，只有当入射光的频率大于某一频率 ν_0 时，电子才能从金属表面逸出，电路中才有光电流，这个频率 ν_0 叫做截止频率（也称红限），如果入射光的频率 ν 频率小于截止频率（即 $\nu < \nu_0$ ），那么，无论光的强度有多大，都没有光电子从金属表面逸出。

② 如果降低加速电势差的量值，光电流 i 也随之减小。当电势差 U 减小到零变为负时（ $U = V_A - V_K$ 为负），光电流 i 通常并不为零，这表明从金属板 K 释放出的电子具有初动能，所以尽管有电场阻碍它运动，仍有部分电子能到达金属板 A。如果令负的电势差足够大，从而使由金属板 K 表面释放出的具有最大速度 v_m 的电子也不能到达 A 极时，光电便降为零。光电流为零时，外加电势差的绝对值 U_a 叫做遏止电势差。

遏止电势差存在，表明光电子的初速度具有一上限 v_m ，与此相应的初动能也有一上限，它等于电子反抗遏止电场力所做的功

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = eU_a \quad (13-6)$$

式中 m 和 e 分别为电子的质量和电量。

③ 实验还指出，用不同频率的光照射金属 K 的表面时，只要入射光的频率 ν 大于截止频率，那么遏止电势差 U_a 和入射光的频率之间具有线性关系（如图 13.6 所示），即

$$U_a = K\nu - U_0 \quad (13-7)$$

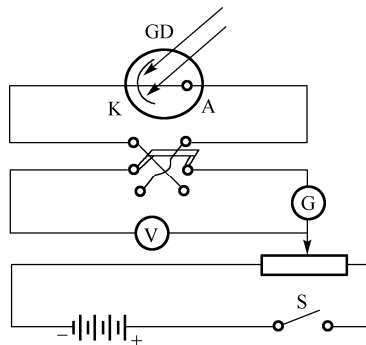


图 13.5 光电效应实验简图

式中 K 和 U_0 都是正数, 对于不同金属, U_0 的量值不同, 对于同一金属, U_0 为恒量。其中 K 是不随金属性质类别而改变的普适恒量。

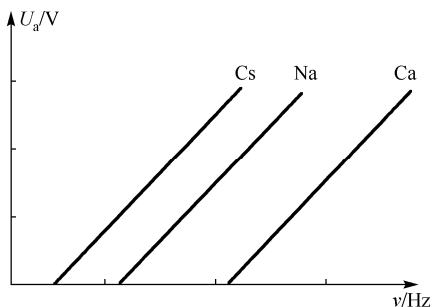


图 13.6 遏止电势差与频率的关系 (钠: $\nu_0 = 4.39 \times 10^{14}$ Hz)

④ 由式 (13-6) 和式 (13-7) 可得

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = eK\nu - eU_0 \quad (13-8)$$

该式表明: 光电子的初动能随入射光频率 ν 线性增加, 而与入射光的强度无关。由 (13-8) 可看出, 由于 $\frac{1}{2}mv_m^2$ 为正值, 入射光的频率 ν 必须满足 $\nu \geq \frac{U_0}{K}$ 的条件。令 $\nu_0 \geq \frac{U_0}{K}$, ν_0 称为光电效应的截止频率 (又称红限频率)。相应波长不叫红限波长。红限频率 ν_0 的存在说明: 当光照射某一金属时, 无论光的强度如何, 只要入射光的频率大于截止频率, 则几乎立即就有光电子逸出; 如果入射光的频率小于该金属的红限频率 ν_0 , 则无论光的强度如何, 都不会产生光电效应。

根据测量, 从光开始照射金属表面, 到光电子发射出来, 其时间间隔不超过 10^{-9} s, 这就是光电效应的瞬时性。

用经典电磁理论是不能解释光电效应的实验事实的。按照经典理论, 无论入射光的频率为多少, 只要其光的强度足够大, 就能使电子具有足够的能量逸出金属, 然而实验却指出, 若入射光的频率小于截止频率, 无论其强度有多大, 都不能产生光电效应。从时间角度来说, 按照经典理论, 电子逸出金属所需要的能量, 须要有一定的时间来积累, 只有当积累的能量大于电子逸出金属所需要的能量时, 才可能有电子逸出。按照经典理论, 入射光越弱, 能量积累的时间就越长。然而, 实验却表明: 光的照射和光电子的释放, 几乎是同时发生的, 在精度范围内时间不超过 10^{-9} s。这也显示出经典电磁理论的缺陷。

13.2.2 爱因斯坦的光子理论 光的波粒二象性

1905 年, 爱因斯坦将普朗克的量子假设发展成光量子 (光子) 的概念, 也正是这一年, 爱因斯坦创立了狭义相对论。

爱因斯坦认为, 电磁波(光波)的结构应该是量子化的, 其最小单元为一个光子, 每个光子均以同样的速度 c (光速) 运动。频率为 ν 的光波, 其光子的能量和动量为

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad (13-9)$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (13-10)$$

λ 为光波的波长, 光子的运动方向应该和光波的传播方向一致。

对于单色平面波, 如引入“波矢量”, 其方向为波的传播方向, 数值为 $k = |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$, 则光子的动量可以表示为

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (13-11)$$

光和其他物质发生相互作用时, 基元过程通常表现为光子-电子作用或光子-原子作用, 利用光子的概念并对作用过程应用能量守恒定律和动量定律, 一般能得出某些重要结论。

按照光子理论。光电效应可解释为, 金属中的“自由电子”要逸出表面须要克服“逸出功” A 。当金属受到频率为 ν 的光照射时, 自由电子即可吸收光子, 从而获得能量 $h\nu$ (注: 电子同时或在短时间内连续吸收两个以上光子的机会极小, 可以不考虑这种可能性)。如这时 $h\nu > A$, 电子就可以从金属中逸出, 并具有动能

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = h\nu - A \quad (13-12)$$

该式称为爱因斯坦公式。由此可见, 光电子的动能完全由逸出功 A (金属性质决定) 和入射光的频率 ν 所决定, 而与光的强度无关, 光电子的数目则与入射光的强度成正比, 即与入射光子的总数成正比。对光电子的动能的实验测量完全证实了爱因斯坦公式的正确性。由爱因斯坦公式还可以算出, 当给定逸出功 A , 入射光的频率 ν 必须超过 A/h , 才能产生光电效应; 如 $\nu < A/h$, 尽管光很强, 也不会产生光电子, 这个结论已被实验证实。

至此可以说, 光的干涉、衍射等实验证明了光具有波动性, 这种认识已在 19 世纪完成。由爱因斯坦光子理论假设知, 光子不仅具有能量, 而且还具有质量和动量等一般粒子所共有的特性, 该理论不仅成功地解释了光电效应, 还说明了光的波动说不能解释的其他许多现象, 从而确立了光的粒子性。因此, 光不仅具有波动性质, 而且具有粒子性。关系式 (13-9) 和式 (13-10) 把光的双重性质——波动性和粒子性联系起来, 动量和能量是描述粒子性的, 而频率和波长则是描述波动性的。光的这种双重性称为光的波粒二象性。

例 13-3 钨的逸出功是 4.25 eV, 钡的逸出功是 2.50 eV, 分别计算钨和钡的截止频率。哪一种金属可以用作可见光范围内的光电管阴极材料?

解 由光电效应方程 $\frac{1}{2}m_e v^2 = h\nu - A$ 可知, 当入射光频率 $\nu = \nu_0 = \frac{A}{h}$ 时, 电子刚能逸出

金属表面, 其初动能 $\frac{1}{2}m_e v^2 = 0$ 。因此 ν_0 是能产生光电效应的入射光的最低频率 (即截止频率), 它与材料的种类有关。

$$\text{钨的截止频率: } \nu_{01} = \frac{A_1}{h} = 1.09 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$$\text{钡的截止频率: } \nu_{02} = \frac{A_2}{h} = 0.603 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

对照可见光的频率范围 $0.395 \times 10^{15} \sim 0.750 \times 10^{15} \text{ Hz}$ 可知, 钡的截止频率 ν_{02} 正好处于该范围内, 而钨的截止频率 ν_{01} 大于可见光的最大频率, 因而钡可以用作可见光范围内的光电管阴极材料。

13.2.3 康普顿效应

1923 年康普顿 (A.H.Compton) 研究了 X 射线经轻物质散射的实验。如图 13.7(a) 所示是康普顿实验装置示意图。X 射线源发射束波长为 λ_0 的 X 射线, 并投射到石墨上, 经石墨散射后, 散射束穿过光阑, 其波长及相对强度可以由晶体和探测器所组成的摄谱仪来测定, 改变散射角, 进行同样的测量。实验发现, 在散射光谱中除有与入射光波长 λ_0 相同的射线外, 同时还有波长 $\lambda > \lambda_0$ 的射线。这种改变波长的散射称为康普照顿效应。按照经典电磁理论, 电磁波被散射后波长不改变, 因此经典理论很难解释这一现象。

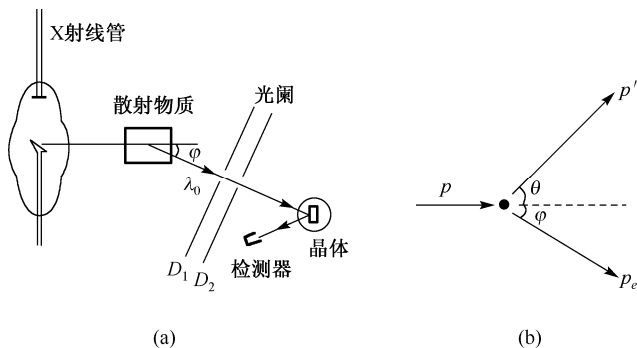


图 13.7 (a) 康普顿实验装; (b) 康普顿散射

如果把这个过程看作是光子与电子碰撞的过程, 则康普顿效应就可以得到完满的解释。如图 13.7(b) 所示, 设入射光子的能量、动量分别为 E 、 p , X 射线波长为 λ , 电子初动量为 0, 初始能量为 $m_0 c^2$ 。散射后, 设光子沿 θ 方向射出, 波长变为 λ' , 能量和动量变为 E' 、 p' ; 电子的反冲角设为 φ , 能量、动量变为 E_e 、 p_e 。按照相对论力学, 对散射过程应用能量守恒定律、动量守恒定律, 最后可以计算出 X 射线经过散射后, 波长的改变 ($\lambda' - \lambda$) 为

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (13-13)$$

从上式可见, 波长的改变 $(\lambda' - \lambda)$ 与散射角 θ 有关, 并正比于 $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$ (称为康普顿波长), 其值为

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$$

公式 (13-13) 由康普顿首先得出, 由康普顿和我国物理学家吴有训用实验证实。

例 13-4 用波长 $\lambda_0 = 0.1 \text{ nm}$ 的光子做康普顿散射实验, 求: ① 散射角为 90° 的散射波长是多少? ② 反冲电子的动能是多大? (普朗克常数 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ 。电子静止质量 $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 。)

解 ① 康普顿散射光子波长改变为

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) = 0.024 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = 1.024 \times 10^{-10} \text{ m}$$

② 根据能量守恒, 有

$$h\nu_0 + m_e c^2 = h\nu + mc^2$$

$$h\nu_0 = h\nu + (m - m_e)c^2 = h\nu + E_k$$

即

$$\frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda} + E_k = \frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda} + E_k$$

所以,

$$E_k = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)} = 4.66 \times 10^{-17} \text{ J} = 29 \text{ eV}$$

13.3 实物粒子的波粒二象性 不确定关系

13.3.1 德布罗意假设及实验证明

1. 德布罗意假设

光的干涉和衍射现象为光的波动性提供了有力的证明, 普朗克和爱因斯坦关于光的微粒说理论又在解释热辐射、光电效应、康普顿效应等现象上取得了很大的成功。光束可以看作是以光速运动的光子流, 而每个光子具有能量和动量, 由式 (13-9) 和式 (13-10) 知,

光子的能量和动量分别为 $E = h\nu$ 和 $p = h/\lambda$, 能量和动量是描述粒子性的, 而频率和波长则是描述波动性的。光的这种双重性(“波动-粒子二象性”)通过普朗克常量 h 定量地联系起来。

1924 年, 德布罗意(L.V. de Broglie)注意到光的本质包含着粒子和波动两个方面, 光具有量子化(光子)的结构, 每一个光子的能量和动量由爱因斯坦公式表示出, 即为

$$E = h\nu, \quad p = h/\lambda, \quad p = \hbar k \quad (13-14)$$

光在传播过程中表现出波动性, 其干涉、衍射等现象就是波动性的典型特征。但在宏观尺度上光的传播可以用光线概念来表述, 波动光学表现为几何光学, 波动规律以类似于力学规律的形式表现出来。德布罗意认为, 电子以及其他物质粒子也都应该有波动-粒子二象性。电子在结构上的量子性(粒子性)已被汤姆孙(J.J.Thomson)1887 年研究阴极射线时所证实, 电子在宏观尺度的运动遵守牛顿质点学的规律, 这早已被实验所肯定。但在微观尺度(量级与波长接近的尺度)电子运动规律本质上应该是波动规律。根据类比方法, 德布罗意提出了实物粒子也具有波动性的假设。

德布罗意认为, 质量为 m 的粒子、以速度 v 做匀速运动时, 具有能量 E 和动量 p , 也具有波长 λ 和频率 ν 。而这些量之间的关系与光子的能量和动量公式(13-14)相类似, 即

$$\begin{aligned} E &= mc^2 = h\nu \\ p &= h/\lambda \end{aligned} \quad (13-15a)$$

按照德布罗意假设, 以动量 p 运动的实物粒子的波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{m_0 v} \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{hc}{\sqrt{E_k^2 + 2E_0 E_k}} \quad (13-15b)$$

式中 h 为普朗克常数, 这种波叫**德布罗意波**, 或**物质波**。式(13-15)叫做**德布罗意公式**, 它体现了实物粒子波动性的物质波, 与实物粒子性的动量之间的关系。式中, $E_k = mc^2 - m_0 c^2$ 是粒子的相对论动能, $E_0 = m_0 c^2$ 是粒子的静能。

德布罗意提出上述“物质波”设想时, 并无直接的实验根据, 而是一种科学假设。但德布罗意的物质波思想直接导致了量子力学的诞生, 相隔不到 2 年, 1926 年, 薛定谔(E.Schrödinger)就以“波动力学”的形式建立了量子力学。稍早的海森伯(W.Heisenberg)于 1925 年以“矩阵力学”的形式建立了量子力学。

德布罗意提出物质波的概念后, 在 1927 年, 戴维孙(C.J.Davisson)-革末(L.H.Germer)进行了电子衍射实验, 从而真正证实了电子确实具有波动性。接着科学家们还做了中子衍射实验, 各种原子束和分子束的衍射实验, 20 世纪 90 年代还做了 C_{60} 分子(由 60 个 C 碳原子形成的足球状大分子)束衍射实验, 这些实验都证实了公式 $\lambda = h/p$ 的正确性, 证实了实物粒子确实具有波动性, 波动性是物质粒子普遍具有的。

设自由粒子的动能为 E , 粒子的速度远小于光速, 则有 $E = \frac{p^2}{2u}$ 。由(13-15)式可知,

德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2\mu E}}$$

如果电子被 V 伏的电势差加速, 则 $E = eV$ eV, e 是电子电荷的大小。将 h 、 μ 、 e 的数值代入后, 可得

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\mu e U}} \approx \frac{1.225}{\sqrt{U}} \text{ nm} \quad (13-16)$$

由此可知, 用 150 V 的电势差所加速的电子, 德布罗意波长为 0.1 nm, 与 X 射线的波长同数量级。

2. 戴维孙 (C.J.Davisson) - 革末 (L.H.Germer) 电子衍射实验

戴维孙-革末所做的电子衍射实验装置如图 13.8 所示, 由电子枪发射的电子注正入射到镍单晶上, 观察散射电子束的强度和散射角之间的关系。电子注在晶体表面上被散射, 散射电子束由法拉第圆筒收集, 法拉第圆筒可以转动以调节散射角 θ 。散射电子束的强度由与法拉第圆筒相连的电流计读出。戴维孙-革末发现, 散射电子束的强度随散射角 θ 的改变而改变, 当 θ 取某些确定值时, 强度有最大值。这一测量结果不能用粒子运动来说明, 但该现象可以用 X 射线对晶体的衍射方法分析, 测量结果表明, 电子确实具有波动性, 而且也检验了德布罗意波长公式的正确性。

电子束不仅在单晶体上反射时产生衍射现象, 英国物理学家汤姆孙 (G.P.Thomson) 在 1928 年独立地从实验中观察到电子透过多晶薄片时的衍射现象, 如图 13.9(a) 所示, 电子从灯丝 K 逸出后, 经过加速电压加速, 再通过小孔 D 成为一束很细的平行电子束, 其能量约为数千电子伏, 当电子穿过一多晶薄片 M (如铝箔) 后, 再射到照相底片 P 上, 就获得了如图 13.9(b) 所示的衍射图样。

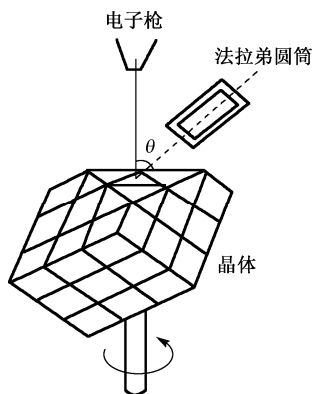


图 13.8 电子在晶体表面的衍射

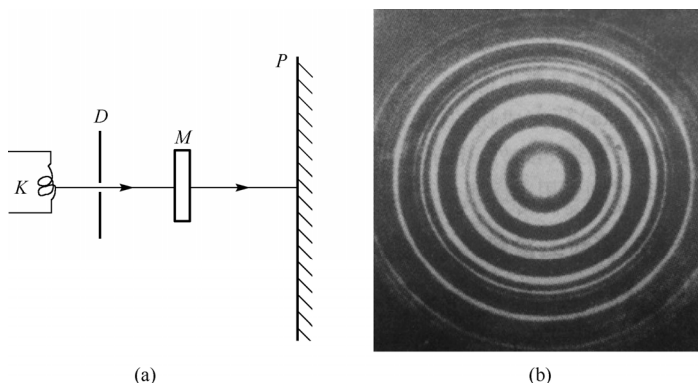


图 13.9 电子在多晶上的衍射

电子的波动性还可以用与光的双狭缝衍射相当的实验来显示,该方法可参考波动光学的内容。

例 13-5 在一电子束中,电子的动能为 200 eV,求此电子的德布罗意波长。

解 由于电子的动能值并不大,不必用相对论来处理问题,即可由 $E_k = m_0 v^2 / 2$ 得电子运动的速度为

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m_0}}$$

将数据 $m_0 = 9.1 \times 10^{-31}$ kg (为电子的静止质量), $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19}$ J 代入,得

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m_0}} = \sqrt{\frac{2 \times 200 \times 1.6 \times 10^{-19}}{9.1 \times 10^{-31}}} \text{ m} \cdot \text{s} = 8.4 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

可见,电子的速率 $v \ll c$ 。由德布罗意公式得电子波长为

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{9.1 \times 10^{-31} \times 8.4 \times 10^6} = 8.67 \times 10^{-2} \text{ nm}$$

该波长与 X 射线波长同数量级。

13.3.2 德布罗意波的统计解释

在经典物理中从宏观世界看“波动”和“粒子”的概念是很容易理解的,但对微观粒子在某些条件下表现出粒子性,在另一些条件下表现出波动性,而两种性质虽属于同一客体中,却不能同时表现出来。在历史上对实物粒子的这种双重性——“波粒二象性”的理论解释花了较长的时间。直到 1929 年玻恩(M.Born)提出物质波波函数的统计诠释后,才得到满意的结果。

现在用物质波波函数的统计诠释来分析电子的衍射图样。从粒子的观点来看,衍射图样的出现,是由于电子射到各处的概率不同而引起的,电子密集的地方概率很大,电子稀疏的地方概率则很小;而从波动的观点来看,电子密集的地方表示波的强度大,电子稀疏的地方表示波的强度小,所以,某处附近电子出现的概率就反映了在该处德布罗意波的强度。对电子及其他微观粒子都是这样的,这就是玻恩物质波波函数的统计诠释。普遍地说:在某处德布罗意波的强度是与粒子在该处邻近出现的概率成正比的。微观粒子的波粒二象性是人们辩证地认识自然现象的一个范例。

13.3.3 不确定关系

玻恩对波函数的统计诠释把“粒子-波动”两重性统一到几率波的概念上。在此概念中,经典波和经典粒子的概念被部分地保留,而另一部分则被摒弃。亦即在经典力学中,粒子运动的图象和概念不可能全部适用。现在的问题是,由于“粒子-波动”两重性,经典

粒子运动的概念究竟在多大程度上适用于微观世界？1927 年德国物理学家海森伯 (W.Heisenberg) 的测不准关系对此做了最集中和最形象的概括。下面给出具体介绍。

在经典力学中，运动物体在任何时刻都有完全确定的位置、动量、能量和角动量等，这就是常说的牛顿力学的确定性。但对于微观粒子，由于具有波粒二象性，因此微观粒子在某位置上仅以一定的概率出现。这就是说，粒子的位置是不确定的。粒子的位置虽不确定，但基本出现在某一区域（用 Δ 来表示不确定范围），如 Δx （一维情形）或 $\Delta x \Delta y \Delta z$ （三维情形）范围内，称 Δx 、 Δy 、 Δz 为粒子坐标的不确定量。

粒子的动量也是如此。下面以电子通过单缝衍射实验来说明。设一德布罗意波长为 λ 的电子束，以速度 v 沿 Oy 轴经狭缝 Δx 到达屏幕 CD 得到衍射图样。如果只考虑 ($k=1$) 中央极大，且中央明纹旁的第一暗纹的衍射角为 θ ，则根据光学单缝衍射公式，近似有

$$\sin \theta = \lambda / \Delta x$$

式中德布罗意波长 $\lambda = \frac{h}{p}$ 。由于中央明纹是电子可能到达的地方，对一个电子来说，不能确定它是从缝中哪一点通过的，即电子通过狭缝的坐标不能完全确定，但它不确定的范围一定是 Δx 。在同一瞬时，由于衍射的缘故，电子的动量的大小虽未变化，但动量的方向改变了，由图 13.10 可见，动量 p 在 Ox 轴方向的分量 p_x 将具有不同的量值，若只考虑电子在中央明纹区，则

$$\Delta p_x \approx p \sin \theta = p \frac{\lambda}{\Delta x}$$

由德布罗意公式 $\lambda = h / p$ ，可得

$$\Delta p_x = \frac{h}{\Delta x} \quad \text{或} \quad \Delta x \cdot \Delta p_x = h$$

这样，在电子通过狭缝的瞬间，其坐标和动量都存在着各自的不确定范围。并且由上面的讨论可知，这两个量的不确定度是互相关联着的，狭缝 Δx 越小则 Δp_x 越大，反之亦然。在上式的讨论中，如果考虑其他高次衍射条纹的出现，则 $\Delta p_x \geq p \sin \theta$ ，因而，一般地，

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h \quad (13-17)$$

这个关系叫做不确定关系，有时人们也将该关系称为不确定原理。

由量子力学证明得出的不确定关系不仅存在于动量和坐标这一组物理之间，也存在于其他组物理量之间，例如，能量和时间这组量也有关系

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h$$

由坐标和动量的不确定关系，并应用 $E = p^2 / (2m)$ ， $\Delta E = p \Delta p / m = v \Delta p$ 及 $\Delta t = \Delta x / v$ ，可得

① 按量子力学严格的证明，将得出 $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h / 4\pi$ 。

$\Delta E \cdot \Delta t \geq h$ 。应用这个关系可以解释原子光谱谱线为什么有一定的宽度。若电子在激发态的寿命 $\tau \sim 10^{-9} \text{ s}$, 由关系式 $\Delta E \geq h / \Delta t = h / \tau$ 可知, 能谱有一定的宽度。

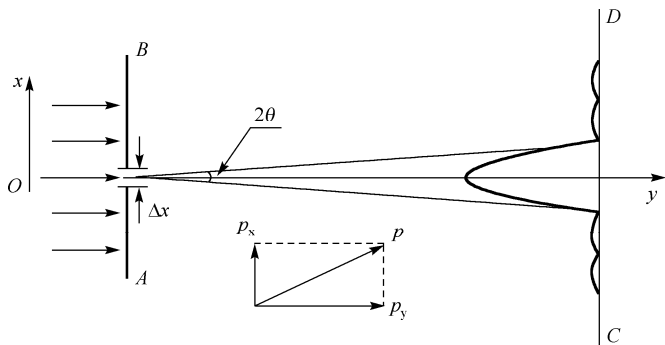


图 13.10 电子单缝衍射示意图

例 13-6 早期的电视显像管中, 电子枪枪口直径为 0.1 mm , 求电子射出电子枪后的速度的不确定度, 若电子射出电子枪的速率在 $10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的数量级, 试判断电子表现的是粒子性还是波动性?

解 取电子枪的口径作为电子在横向上的位置不确定度 $\Delta x = 1 \times 10^{-4} \text{ m}$, 由不确定关系 $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h / 2\pi$, 并取等号计算, 因为 $\Delta p_x = m_0 \Delta v_x$, 故有

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \Delta x (m_0 \Delta v_x) = h / 4\pi$$

$$\Delta v_x = \frac{h}{4\pi m_0 \Delta x} = \frac{6.625 \times 10^{-34}}{4\pi \times 9.1 \times 10^{-31} \times 10^{-4}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0.58 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

讨论: 由于 $\Delta v_x \ll v$, 所以在这种情况下, 电子的波动性仍然不起什么实际影响, 电子的行为表面上表现得和经典粒子一样, 这就是为什么电子产生的电视图像清晰可见的原因。

13.4 波函数薛定谔方程

量子力学的发展过程错综复杂, 在前面的章节已做了一定的简述, 本节将以实验揭示的微观粒子的波粒二象性为根据, 引入描述微观粒子状态的波函数, 讨论波函数的性质, 建立非相对论量子力学的基本方程——薛定谔方程, 并围绕着薛定谔方程初步阐明波函数的含义, 然后讨论几个较为简单的力学体系, 并求出方程的解和阐明这些解的物理意义。

13.4.1 波函数

薛定谔认为, 像电子、中子、质子等这样具有波粒二象性的微观粒子, 可以用平面波函数来描写它们的波动性, 只不过这时平面波的频率和波长与自由粒子的能量、动量由德

布罗意关系 (13-15a) 联系起来。这就是说微观粒子的波动性与机械波 (如声波) 的波动性有本质的区别, 但为了较直观地得出电子等微观粒子的波函数, 将从机械波的波函数出发, 介绍波函数的意义。在经典力学中, 自由粒子的能量 E 和动量 p 都是恒量, 这与平面波的频率和波矢量不随时间和位置变化相对应。设平面波沿 x 轴的正方向传播, 这时可用下式表示:

$$y(x, t) = y_0 \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (13-18a)$$

平面电磁波的波函数为

$$\begin{aligned} E(x, t) &= E_0 \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) \\ H(x, t) &= H_0 \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (13-18b)$$

或用复数表示为

$$y(x, t) = y_0 e^{-i2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right)} \quad (13-19)$$

事实上, 式 (13-18a) 是式 (13-19) 的实数部分^①。利用 $\lambda = \frac{h}{p}$, $\nu = \frac{E}{h}$ 关系, 由式 (13-19) 可得量子力学中自由粒子的波函数, 通常用 $\Psi(x, t)$ 表示, 即

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 e^{-i2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right)} \quad (13-20)$$

该式即为描述能量为 E 、动量为 p 的自由粒子的德布罗意波, 并称 Ψ 为物质波的波函数。

该怎样来理解波函数的意义呢? 答案是: 波函数的统计诠释赋予了波函数确切的意义。现在用光波和物质波的对比的方法来给予说明。从波动的观点来看, 光的衍射图样亮处光强大, 暗处光强小。而光强与光振动的振幅平方成正比, 所以图样亮处光振动的振幅平方大, 暗处光振动的振幅平方小。又从微观粒子的观点来看, 光强大的地方表示单位时间内到达该处的粒子数多, 光强小的地方, 则表示单位时间内到达该处的粒子数少。按统计的观点来看, 这就相当于粒子到达亮处的概率要远大于粒子到达暗处的概率。所以, 如果假设粒子在某处附近出现的概率与该处的光强成正比, 也就是与该处光振动的振幅的平方成正比。这样, 两种描述就一致了。

前面在对德布罗意波的统计解释中指出, 电子 (粒子) 密集的地方表示波的强度大, 电子 (粒子) 稀疏的地方表示波的强度小, 某处附近电子 (粒子) 出现的多少是和粒子在该处的概率成正比的。因此, 某一时刻出现在某点附近体积元 dV 中的粒子的概率, 与 $\Psi^2 dV$

^① $e^{-ikx} = \cos kx - i \sin kx$, $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$, $i = \sqrt{-1}$ 。

成正比。由式(13-20)知,波函数 Ψ 为一复数,而波的强度是为一实数,所以 $\Psi^2 dV$ 应由下式所替代:

$$|\Psi^2| dV = \Psi \Psi^* dV$$

式中, Ψ^* 是 Ψ 的共轭复数。 $|\Psi^2|$ 为粒子出现在某点附近的单位体积元中的概率,称为**概率密度**。

由于在某一时刻空间给定点的粒子数出现的概率是唯一的,不可能既是这个值又是另一个值,并且应该有限。在空间不同点处,概率的分布应该是连续的,不能在任何点处发生突变。所以波函数 Ψ 必须是单值、有限、连续函数。

又因为粒子在整个空间出现的概率的总和等于1,即将式(13-20)对整个空间积分后,应有

$$\int |\Psi|^2 dV = 1 \quad (13-21)$$

式(13-21)称为归一化条件,满足式(13-21)的波函数叫做**归一化波函数**。

综上所述,在量子力学中,用来描写微观粒子状态的波函数是时间和空间的单值函数。空间某点波函数的模的平方表示粒子在该点附近出现的概率。根据对波函数的统计诠释,要求波函数 Ψ 必须是单值、有限、连续函数。

13.4.2 薛定谔方程

薛定谔方程是量子力学中最基本的方程,它的地位与经典力学中的牛顿方程、电磁场中的麦克斯韦方程相当。在经典力学中,当质点在某一时刻的状态为已知时,由质点的运动方程可以求出以后任一时刻质点的状态。在量子力学中情况也是如此,当微观粒子的某一时刻的状态为已知时,以后时刻粒子所处的状态也要由一个方程来决定。所不同的是,在经典力学中,质点的状态用质点坐标和速度来描述,质点的运动方程就是大家熟悉的牛顿方程。而在量子力学中,微观粒子的状态则用波函数来描述,决定粒子状态变化的方程是下面要建立的薛定谔方程。应注意,这里只是介绍建立薛定谔方程的思路,并非理论推导,因为它和牛顿方程一样,不是由其他基本原理推导出来的。薛定谔方程的正确性只能靠实践来检验。

设有一质量为 m ,动量为 $p = mv$ 、能量为 $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ 的自由粒子,沿 x 轴运动。

该自由粒子可用平面波函数式(13-20)描述,将该平面波函数对 x 求二阶偏导数,得到

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi \quad (13-22a)$$

同理有

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi \quad (13-22b)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi \quad (13-22c)$$

再将该平面波函数对 t 求一阶偏导数, 得到

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \Psi \quad (13-23)$$

考虑自由粒子限于低速运动的情形, 并利用自由粒子能量和动量的非相对论关系 $p^2 = 2mE_k$ (这里 $E = E_k$), 比较式 (13-22a) 和式 (13-23), 不难得到

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (13-24)$$

该式称为一维运动的自由粒子的含时薛定谔方程。

现在再建立粒子在势场中所满足的微分方程, 若粒子所处势场为 $E_p(x)$, 则其能量关系为

$$E = E_k + E_p = p^2 / 2m + E_p \quad (13-25)$$

将此关系代入式 (13-22) 和式 (13-23), 即

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} (p^2 / 2m + E_p) \Psi \quad (13-26)$$

于是得到

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + E_p \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (13-27)$$

这就是在势场中做一维运动粒子的含时薛定谔方程, 该方程描述了一个质量为 m 的粒子, 在势能为 $E_p(x)$ 的势场中, 其状态随时间变化的规律。由此看出, 式 (13-24) 实质上是当 $E_p(x) = 0$ 时的特殊情况。如果粒子在三维空间运动, 并考虑 $E_p(x) \rightarrow E_p(x, y, z)$, 则式 (13-27) 推广为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + E_p(x, y, z) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (13-28)$$

引入拉普拉斯 (Laplace) 算符 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, 则式 (13-28) 便可写为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + E_p(x, y, z) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (13-29)$$

这是一般的薛定谔方程。再次强调, 上面只是建立了薛定谔方程, 而不是从数学上将它推导出来。该方程的建立是从描述自由粒子的平面波 (见式 (13-20)) 出发的。如果不从这个复数表示式出发, 而从平面波的实数表示式 (13-18a) 出发, 就得出薛定谔方程。

下面讨论式(13-28)的解,通常 $E_p(x,y,z)$ 可以是时间的函数,这种情况将在后面进行讨论。在某些情况下,势场 $E_p(x,y,z)$ 仅是坐标的函数,而与时间无关。于是就可以把式(13-29)的波函数分成坐标函数与时间函数的乘积,即

$$\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,y,z)f(t) \quad (13-30)$$

将式(13-29)式代入方程式(13-28),并把方程两边用 $\psi(x,y,z)f(t)$ 去除,得到

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x,y,z) + E_p(x,y,z) \psi(x,y,z) \right] \frac{1}{\psi(x,y,z)} = i\hbar \frac{\partial f(t)}{\partial t} \frac{1}{f(t)}$$

上述方程左边只是坐标的函数,右边只是时间的函数,而时间 t 和坐标 (x,y,z) 是相互独立的变量,所以只有当两边都等于一个常量时,等式才能成立。以 E 表示这个常量,有

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = Ef(t) \quad (13-31)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x,y,z) + E_p(x,y,z) \psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z) \quad (13-32)$$

对方程式(13-31)积分可以得到

$$f(t) = Ce^{\frac{i}{\hbar}Et}$$

式中 C 为任意常数,将其放到 $\psi(x,y,z)$ 中去。另外,由于指数的量纲只能为1的纯数(其中 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$,称为约化普朗克常量,其值等于 $1.0547168 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$),从单位可见 E 必定具有能量的量纲,这样方程式(13-32)可以写成

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + E_p \psi = E\psi \quad (13-33a)$$

或写为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + (E_p - E)\psi = 0 \quad (13-33b)$$

这就是一般的定态薛定谔方程。由于波函数 Ψ 含有时间 t 的因子是 $e^{\frac{i}{\hbar}Et}$,所以概率密度

$$|\Psi|^2 = \Psi\Psi^* = |\psi|^2 e^{\frac{i}{\hbar}Et} \cdot e^{+\frac{i}{\hbar}Et} = |\psi|^2 \quad (13-34)$$

与时间无关。由于这个性质,把这样的态称为定态。式(13-33a)、式(13-33b)中的 E 是解薛定谔方程时分离变量引入的常量,实际上它是粒子在稳定态中具有的能量,称为定态能量。

求解式(13-33)定态波函数时,要求 ψ 是连续、单值、有限且归一化的函数,由于有这些条件的限制,只有当薛定谔方程中的能量 E 具有某些特定值时才有解,这些特定的能

量值称为能量本征值，而相应的波函数则称为本征波函数，本征波函数由具体问题中波函数应满足的条件得出。

13.4.3 一维无限深势阱

设粒子在保守力场的作用下被限制在一定范围内，势能函数为

$$E_p(x) = \begin{cases} 0, & |x| < a \\ \infty, & |x| \geq a \end{cases} \quad (13-34)$$

如图 13.11 所示，这种势称为一维无限深势阱，粒子在这个势阱内 $|x| < a$ 运动时，定态薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \quad |x| < a \quad (13-35)$$

在阱外 $|x| \geq a$ 时，定态薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + E_p\psi = E\psi \quad |x| \geq a \quad (13-36)$$

由于阱外势能 $E_p \rightarrow \infty$ ，根据波函数满足的连续性和有限性条件，只有当 $\psi = 0$ 时，式(13-36)才能成立，所以有

$$\psi = 0, \quad |x| \geq a \quad (13-37)$$

这也是解式(13-35)时的边界条件。

在阱内，波函数满足方程式(13-35)，为简单起见，引入符号

$$k = \left(\frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{1/2} \quad (13-38)$$

因而方程式(13-35)可改写为

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \quad |x| < a$$

它的解是

$$\psi = A \sin kx + B \cos kx, \quad |x| < a \quad (13-39)$$

根据 ψ_i 的连续性，再考虑 $\psi = 0$ ($|x| \geq a$)，则有

$$\begin{aligned} A \sin ka + B \cos ka &= 0 \\ -A \sin ka + B \cos ka &= 0 \end{aligned}$$

由此可得

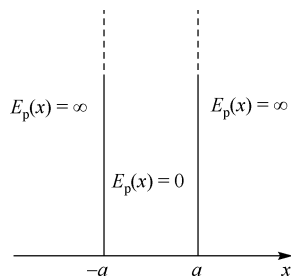


图 13.11 一维无限深势阱

$$A \sin ka = 0$$

$$B \cos ka = 0$$

因为 A 和 B 不能同时为零，否则 ψ 处处为零，这在物理上是没有意义的，因此，这里得到两组解

$$A = 0, \quad \cos ka = 0$$

$$B = 0, \quad \sin ka = 0$$

这样可求得

$$ka = \frac{n}{2}\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13-40)$$

对于第一组解， n 为奇数；对于第二组解， n 为偶数。 $n=0$ 对应于 ψ 恒为零的解。而 n 等于负整数时不给出新的解。现将 $k = \left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{1/2}$ 代入，于是有

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{8ma^2}, \quad n = \text{整数} \quad (13-41)$$

由此可知，对应于 n 的全部可能值，有无限多个能量值，它们组成体系的分立能级，这个 n 就是能量对应的量子数。

现在将 $A=0$ ， $\cos ka=0$ 和 $B=0$ ， $\sin ka=0$ 分别代入式 (13-39)，同时考虑式 (13-40) 及边界条件 $\psi=0$ ，得到一组解的波函数为

$$\psi_n = \begin{cases} A \sin \frac{n\pi}{2a} x, & n \text{ 为偶数}, |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases} \quad (13-42)$$

另一组解的波函数为

$$\psi_n = \begin{cases} B \cos \frac{n\pi}{2a} x, & n \text{ 为奇数}, |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases} \quad (13-43)$$

式 (13-42) 和式 (13-43) 可并为一个式子

$$\psi_n = \begin{cases} A' \sin \frac{n\pi}{2a} (x+a), & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases} \quad (13-44)$$

对波函数归一化，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2 dx = \int_{-a}^a |\psi_n|^2 dx = \int_{-a}^a \left| A' \sin \frac{n\pi}{2a} (x+a) \right|^2 dx = 1 \quad ①$$

求得

$$A' = \sqrt{\frac{1}{a}}$$

于是得到定态波函数为

$$\psi_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \frac{n\pi}{2a} (x+a), & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases} \quad n=0,1,2,3,\dots \quad (13-45)$$

粒子的波函数为

$$\begin{cases} \Psi(x, t) = 0 \\ \Psi(x, t) = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \frac{n\pi}{2a} (x+a) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \end{cases} \quad (13-46)$$

下面讨论粒子在一维无限深势阱运动的特征。

① 由波函数式 (13-43) 和式 (13-44) 可知, 在 $|x| \geq a$ 时波函数均为零, 即粒子被束缚在势阱内部。常把这种无限远处为零的波函数所描述的状态称为束缚态, 束缚态所属的能量不能连续地取值, 只能取分立值。由式 (13-41) 确定, 为

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{8ma^2}, \quad n=1,2,3,\dots$$

可见粒子的最小能量不等于零, 因为 $n \neq 0$, $\Psi(x,t)=0$, 说明不存在这种状态, 所以 $n=1$ 的态体系能量最低, 常把这种态称为基态, 最小能量称为基态能; 也常称一维无限深势阱中粒子的基态是 $n=1$ 的本征态; 故基态能量和波函数可由式 (13-41) 和式 (13-43) 得到, 为

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

$$\psi_1 = B \cos \frac{\pi}{2a} x$$

从上式可见, $|a|$ 越小, E_1 就越大, 粒子运动就越剧烈。

② 图 13.12(a)、(b) 分别给出 ($n=1,2,3,4$) 的一维无限深势阱的能量本征函数 ψ_n 和一维无限深势阱粒子位置几率密度 $|\psi_n|^2$ 的分布曲线。由图可见, ψ_n 与 x 轴相交 $n-1$ 次, 即 ψ_n 有 $n-1$ 节点。

① 应用积分: $\int \sin^2 u du = -\frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u$ 。

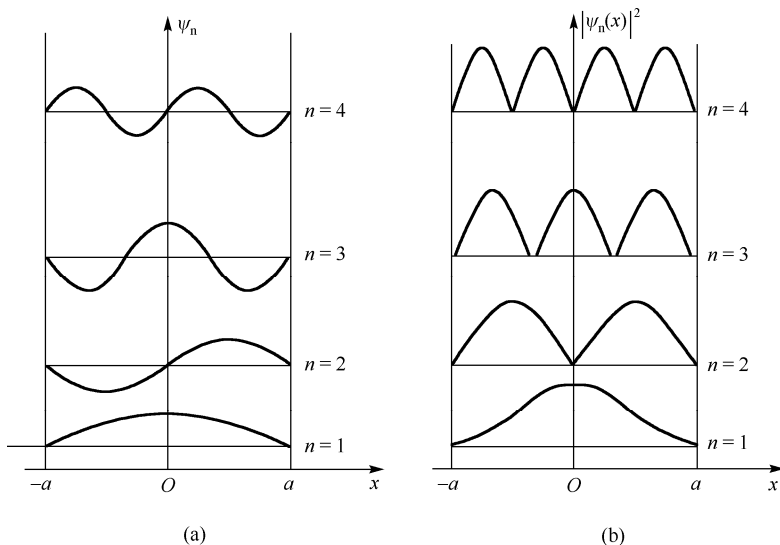


图 13.12 (a) 一维无限深势阱的能量本征函数; (b) 一维无限深势阱粒子位置几率密度分布

例 13-7 设粒子在保守力场的作用下被限制在一定范围内, 势能函数为

$$E_p(x) = \begin{cases} 0, & |x| < a \\ \infty, & |x| \geq a \end{cases}$$

式中, 粒子波函数为 $\psi(x) = Ax(a-x)$, A 为归一化常数, ①求 A ; ②求测得粒子处于能量本征态 $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$ 的概率 P_n , 特别是 P_1 ; ③作图, 比较 $\psi(x)$ 与 $\psi_1(x)$ 的曲线, 从 $P_1 \gg P_n$ ($n \neq 1$) 来说明两条曲线非常相似, 即 $\psi(x)$ 几乎与基态 $\psi_1(x)$ 完全相同。

解 ① 根据归一化条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_0^a |Ax(a-x)|^2 dx = 1$$

得 $A = \sqrt{\frac{30}{a^5}}$, 所以

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{30}{a^5}} x(a-x)$$

② $\psi(x)$ 用 $\psi_1(x)$ 展开, $\psi(x) = \sum_n c_n \psi_n(x)$, 有

$$\begin{aligned} c_n &= \int \psi_n^*(x) \psi(x) dx = \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \sqrt{\frac{30}{a^5}} x(a-x) dx \\ &= \frac{4\sqrt{15}}{n^3 \pi^3} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

$$P_n = |c_n|^2 = \frac{240}{n^6 \pi^6} [1 - (-1)^n]$$

只有当 $n=1, 3, 5, \dots$ 时, P_n 才不为零。特别 $P_1 = \frac{960}{\pi^6} \approx 0.999$, 非常接近于 1。考虑到归一化条件, $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1$, 可知 $P_n (n \neq 1)$ 的概率几乎为 0, 即 $\psi(x)$ 与 $\psi_1(x)$ 的概率几乎完全相同。

③ $\psi(x)$ 与 $\psi_1(x)$ 曲线, 如图 13.13 所示。

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \quad (\text{实线})$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sqrt{\frac{30}{a^5}} x(a-x) \\ &= \sqrt{\frac{30}{a^5}} \left(\frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{x}{a}\right) \end{aligned} \quad (\text{虚线})$$

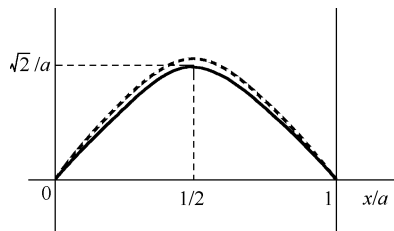


图 13.13 例 13-7 图

13.4.4 势垒贯穿

如图 13.14 所示, 设质量为 m 的粒子以给定的能量 $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ 自左方入射, 遇到图中所

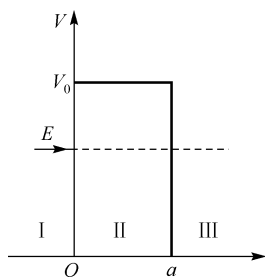


图 13.14 势垒

示的势垒:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x > a \\ V_0, & 0 \leq x \leq a \end{cases} \quad (13-47)$$

设 $V_0 > E$, 求粒子的运动状态。

如果是经典力学问题, 由于 $V_0 > E$, 粒子是不能越过势垒的, 而将在 $x=0$ 处被势垒反弹回去。作为量子力学问题, 由于粒子具有波动性, 结论就不一样了, 可以证明, 粒子将有一定概率透过势垒进入 $x > a$ 区域而继续前进。又由于粒子的能量是给定的, 而且粒子是从 $x = -\infty$ 处射来, 这是一个属于游离态的定态问题。波函数可以表示为

$$\psi(x, t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar} \quad (13-48)$$

空间波函数 $\psi(x)$ 满足定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi = E \psi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi \quad (13-49)$$

亦即

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi &= 0, & x < 0, \quad x > a \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} - \beta^2\psi &= 0, & 0 \leq x \leq a\end{aligned}\quad (13-50)$$

其中,

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad \beta^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \quad (13-51)$$

式(13-50)第一式的解为 $\psi \sim e^{\pm ikx}$, 考虑到“粒子由左入射”这个边界条件, 应取

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Re^{-ikx}, & x < 0 \\ De^{ikx}, & x > a \end{cases} \quad (13-52)$$

Ae^{ikx} 项为入射波, Re^{-ikx} 为反射波, De^{ikx} 为透射波。由于并无粒子从右主入射, 所以在 $x > a$ 区域没有 e^{-ikx} 项。式(13-50)第二式的解为

$$\psi(x) = Be^{\beta x} + Ce^{-\beta x}, \quad 0 < x < a \quad (13-53)$$

其中入射波振幅 A 可以任意给定, 其余 R 、 D 、 B 、 C 积分常数, 可利用波函数的单值、连续条件: $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$, $\psi_I(a) = \psi_{II}(a)$, $\frac{d\psi_{II}(a)}{dx} = \frac{d\psi_{III}(a)}{dx}$ 求得, 从而得到粒子在这三个区域中的波函数以及入射流量、反射流量、透射流量。

$$\text{入射流量} \quad j_A = |A|^2 \frac{\hbar k}{m} \quad (13-54)$$

$$\text{反射流量} \quad j_B = |R|^2 \left(-\frac{\hbar k}{m} \right) \quad (13-55)$$

$$\text{透射流量} \quad j_D = |D|^2 \frac{\hbar k}{m} \quad (13-56)$$

在粒子总能量低于势垒壁高 ($V_0 > E$) 的情况下, 粒子有一定的概率穿透势垒。粒子能穿透比其动能更高的势垒现象, 称为隧道效应。通常用透射系数表示粒子贯穿势垒的概率, 它定义为在 $x = a$ 处透射波的“强度”(模的平方)与入射波“强度”之比, 即

$$\text{透射系数} = \left| \frac{j_D}{j_A} \right| = \left| \frac{D}{A} \right|^2 \quad (13-57a)$$

在许多问题中, 可以证明, 当 $e^{2\beta a} \gg 1$ 时, 透射系数可表示为

$$\text{透射系数} = \left| \frac{j_D}{j_A} \right| = \left| \frac{D}{A} \right|^2 = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2\beta a} \quad (13-57b)$$

事实上粒子也存在被反射回去的概率, 通常用反射系数表示这个概率, 它定义为在 $x=0$ 处反射波的“强度”(模的平方)与入射波“强度”之比, 即

$$\text{反射系数} = \left| \frac{j_R}{j_A} \right| = \left| \frac{R}{A} \right|^2 \quad (13-58)$$

图 13.15 表示粒子在三个区域中波函数的情况。从式 (13-57b) 可知, 粒子的透射系数与势垒的宽度和高度有关。当势垒加宽 (a 增大) 或变高 (V_0) 增大时, 势垒透射系数变小。在势垒很宽和能量差很大的情况下, 穿透势垒概率几乎为零, 在这种情况下, 由量子力学得出的结论与经典力学得出的结论一致, 这是对应原理的表现。

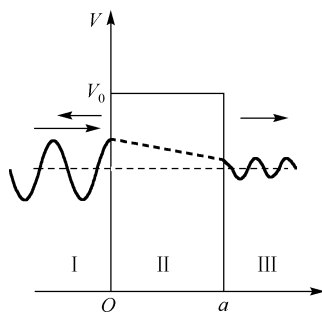


图 13.15 隧道效应

例 13-8 求①宏观粒子 $m=1\text{g}$, $V_0-E=10^{-7}\text{J}$, $a=0.01\text{m}$ 时的透射系数; ②微观粒子 $m=m_e$ (电子质量), $V_0-E=1\text{eV}$, $a=0.1\text{nm}$ 时的透射系数。

解 ① 因为 $m=1\text{g}$, $V_0-E=10^{-7}\text{J}$, $a=0.01\text{m}$

$$2a\beta = \frac{2a\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} = 2.68 \times 10^{27}$$

由式 (13-57b) 有

$$\left| \frac{D}{A} \right|^2 \sim e^{-2.68 \times 10^{27}} \sim 10^{-1.16 \times 10^{27}}$$

这是一个非常小的数, 可见宏观领域从未发现势垒贯穿现象, 就是因为概率太小。

② 因为 $m=m_e$ (电子质量), $V_0-E=1\text{eV}$, $a=0.1\text{nm}$, 有

$$2a\beta = \frac{2a\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} = 1.026$$

同样得到

$$\left| \frac{D}{A} \right|^2 \sim e^{-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}} \sim e^{-1.026} = 0.36$$

可见, 在微观领域透射率相当大, 即在微观领域势垒贯穿现象是容易发生的。

13.5 量子力学的基本原理

13.5.1 状态和波函数

量子力学的第一个基本假设是用波函数 Ψ 描述微观粒子的运动状态, 由 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 可以得知状态的全部物理性质。所以 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 也称为态函数。

不考虑粒子的自旋时, Ψ 是粒子的坐标 \mathbf{r} 和时间 t 的函数。对于一个随时间变化的运动状态, $\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t)$, 在某个给定的时刻 t_0 , $\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t_0)$ 是 \mathbf{r} 的函数。

波函数的概念是德布罗意物质波思想的发展, 是微观粒子具有波动性的数学描述。而波动性的真正含义是概率性, 波函数 Ψ 所描述的状态性质一般都带有概率性特征, 这是迄今人类已经发现并掌握的微观规律的根本特征。波函数的统计诠释为

$$|\Psi|^2 = \Psi\Psi^* d\tau \quad (\text{粒子在 } d\tau \text{ 中出现的概率}) \quad (13-59)$$

给出状态 Ψ 下粒子空间位置的分布概率。把 \mathbf{r} 当作力学量时, 表示 \mathbf{r} 在一定状态下的取值及分布概率。

13.5.2 量子力学的运动状态满足薛定谔方程

量子力学的另一个基本假设是, 运动状态波函数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 满足薛定谔方程。若粒子所受外界作用可以用 $V(\mathbf{r})$ 表示, 则薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V(\mathbf{r})\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (13-60a)$$

令 $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})$ (称为哈密顿算符), 则式 (13-60a) 改写为

$$\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (13-60b)$$

这是薛定谔方程的普遍形式。薛定谔方程是微观粒子运动状态随时间变化规律的数学描述。由于它是时间 t 的一阶微分方程, 因此, 只须要给定初始时刻 t_0 的波函数 $\Psi(\mathbf{r}, t_0)$, 就可以求出任意时刻 t 的波函数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 。这正是微观领域因果性的表现形式。薛定谔方程保证粒子的空间分布总概率守恒, 亦即保证粒子数守恒。

13.5.3 定态薛定谔方程

定态薛定谔方程式 (13-33), 所描写的是能量具有确定值的运动态, 在这种情况下波函数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 随时间的变化规律具有特别简单的形式

$$\Psi_E(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})_E e^{-iEt/\hbar} \quad (13-61)$$

$\psi(\mathbf{r})_E$ 是满足定态薛定谔方程式 (13-33) 的

$$\hat{H}\psi_E(\mathbf{r}) = E\psi_E(\mathbf{r}) \quad (13-62)$$

这是能量的特征方程, 该方程的每一个解 ψ_{E_n} 表示粒子的某一稳定状态, 因此 ψ_{E_n} 称为定态波函数, 与这个解相应的常数 E_n 就是粒子在这个稳定态中的能量, 称为定态能量, 所有解对应的能量构成粒子运动能谱。

薛定谔方程式 (13-60) 的通解可以表示为各定态波函数的线性组合, 即

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n C_n \psi_{E_n}(\mathbf{r}, t) \quad (13-63)$$

系数 C_n 不随时间改变。

定态是一种稳定状态, $|\psi_E(\mathbf{r}, t)|^2$ 不随时间变化, 由它给出的粒子空间分布概率不变。定态的其他物理性质也都稳定不变。

13.5.4 算符、力学量的平均值

1. 算符

量子力学的另一个基本假设是, 力学量用算符表示。在理论计算中, 力学量 (实验上的可观测量) 可以用一个算符 (算子) 来表示, 这是经典物理中所没有的新概念。式 (13-60a) 中令 $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})$, 这里 \hat{H} 就是一个算符, 它是能量算符。广义上说, 算符是指作用在一个函数上得出另一个函数的运算符号, 某种运算把一个函数 u 变成另一个函数 v , 用符号表示为

$$Fu = v$$

则这种运算的表示符号 F 就是算符。

量子力学中的力学量可以从经典力学量的类比中得到, 凡是有经典力学对应的力学量, 相应的算符根据如下对应关系得出:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}, \quad \mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla \quad (13-64)$$

因此, 纯粹是坐标 (位置) 的函数的那些经典力学量, 其量子力学所对应的算符仍是坐标的函数, 例如, 势能 $V(\mathbf{r})$, 作用力表示为

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \nabla V(\mathbf{r}) \quad (13-65)$$

经典力学中最重要力学量有位置 \mathbf{r} , 动量 \mathbf{p} , 速度 $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m}$, 作用力, 势能 $V(\mathbf{r})$, 动能 $T = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}$, 角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, 总能量 (哈密顿量) $H = T + V$, 等等, 它们相应的算符表示为

$$\text{动能算符} \quad \hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$\text{角动量算符} \quad \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla$$

即

$$\hat{L}_x = (y\hat{p}_x - z\hat{p}_y) = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\hat{L}_y = (z\hat{p}_x - x\hat{p}_z) = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\hat{L}_z = (x\hat{p}_y - y\hat{p}_x) = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

容易计算

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

哈密顿量算符

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

2. 力学量算符的本征方程

如果力学量算符 \hat{F} 作用于一个函数 ψ , 结果等于 ψ 乘以一个常数 λ , 即

$$\hat{F}\psi_F = \lambda\psi_F \quad (13-65)$$

则常数 λ 称为力学量算符 \hat{F} 的本征值。 ψ_F 称为力学量算符 \hat{F} 的本征函数。由本征波函数表征的态称为本征态。方程式 (13-65) 称为算符 \hat{F} 的本征方程。这个概念可以推广到任何力学量。作为一项基本假设, 凡是满足本征方程式 (13-65) 的任何一个 λ 值可以认为就是力学量 F 的一个可能值, 而 ψ_F 则是 \hat{F} 取确定值 λ 时状态的波函数。如果只有某些特殊的 λ 值及相应的 ψ_F 才能满足本征方程式 (13-65), 力学量 F 就是量子化的。换句话说, 由力学量算符的本征方程解出的全部本征值, 就是相应力学量的可能取值。如果用仪器测量这个力学量的取值, 只能测得其本征值。这是量子力学的一个基本假设。

如前面介绍的定态的能级 (能量本征值) 和定态波函数一起由定态薛定谔方程

$$\hat{H}\psi_E(\mathbf{r}) = E\psi_E(\mathbf{r})$$

解出。该式也叫做哈密顿算符 \hat{H} 的本征方程, E 就是本征值, 也就是能量的可能取值, $\psi_E(\mathbf{r})$ 就是能量取确定值 E 的状态的波函数。

3. 力学量的平均值

一般来说, 粒子的任何一个力学量 A 的平均值 (常将平均值 “ \bar{A} ” 表示为 “ $\langle A \rangle$ ”) 可以表示为

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(\mathbf{r}, t) \hat{A} \Psi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (13-62)$$

例 13-9 对于任何归一化波函数 $\Psi(\mathbf{r})$ ，证明粒子的动能平均值可以表示成

$$\bar{T} = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{\text{全空间}} |\nabla \Psi|^2 d\tau$$

证明
$$\bar{T} = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} = \frac{1}{2m} (\overline{p_x^2} + \overline{p_y^2} + \overline{p_z^2})$$

由平均值公式可以证明

$$\overline{p_x^2} = \int_{\text{全}} \Psi^* p_x^2 \Psi d\tau$$

因为，当 A 是力学量算符时，有 $\hat{A}^+ = \hat{A}$ ，即有 $\overline{A^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{A}^2 \Psi d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{A}\Psi|^2 d\tau$ ，所以

$$\overline{p_x^2} = \int_{\text{全}} \Psi^* p_x^2 \Psi d\tau = \int_{\text{全}} |\hat{p}_x \Psi|^2 d\tau = \hbar^2 \int_{\text{全}} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|^2 d\tau$$

同理可求得 $\overline{p_y^2}$ 、 $\overline{p_z^2}$ ，代入 \bar{T} 中，即得证。

13.6 氢原子的量子力学处理方法

氢原子由氢核（质子）和一个核外电子构成，因质子质量约为电子质量的 1837 倍，可近似地认为核不动而电子绕核在库仑场中做匀速圆周运动。氢原子是最简单的原子。本节先研究氢原子的玻尔理论，再研究氢原子的量子力学处理方法。

13.6.1 氢原子光谱的规律性

早已发现，氢原子的光谱由许多分立的谱线组成。氢原子光谱中谱线频率 ν （或波数 $\tilde{\nu} = 1/\lambda$ ）的经验公式是

$$\nu = R_H c \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad \begin{matrix} n' = 1, 2, 3, \dots \\ n = 2, 3, 4, \dots \end{matrix} \quad (13-63a)$$

因为 $\lambda = c/\nu$ ，式 (13-63a) 可改写为

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad \begin{matrix} n' = 1, 2, 3, \dots \\ n = 2, 3, 4, \dots \end{matrix} \quad (13-63b)$$

该式称为巴耳末（Balmer）公式， R_H 是氢的里德伯（Rydberg）常数。实验测得 R_H ^① 的值为

① R_H 的值为 2002 年国际推荐值。

$$R_H = 1.0973731.568525 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

由巴耳末公式可以看出, 如果光谱中有频率为 ν_1 和 ν_2 的两条谱线, 则常还有频率为 $\nu_1 + \nu_2$ 或 $|\nu_1 - \nu_2|$ 的谱线, 这一原则称为并合原则。这一规律性, 用氢原子结构的经典理论是无法解释的, 因此, 这在很长时间内是一个迷。首先, 经典理论不能建立一个稳定的原子模型, 按卢瑟福(E.Rutherford)原子模型, 在经典电动力学理论中, 电子环绕原子核运动是加速运动, 其运动规律为

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (13-64)$$

因此, 在取 $r \rightarrow \infty$ 处为零势面时, 氢原子系统的总能量为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (13-65)$$

按照能量转换与守恒定律, 氢原子不断以辐射的方式发射出能量, 这导致整个原子系统总能量 E 不断减少, 从而电子运动轨道半径就将不断减小, 最终电子将落到原子核中去。其次, 经典理论对电子绕核运动的轨道半径没有限制, 这样加速电子产生的辐射, 其频率是连续分布的, 这与原子光谱是分立的谱线不相符。第三, 按照经典理论, 如果一个体系发射出频率为 ν 的波, 则它也可能发射出各种频率为 ν 的整数倍的谐波, 这也不符合光谱实验结果。实验证明, 谱线频率分布所遵从的是并合原则。

基于上述原因, 这就须要提出一个理论来说明这个实验规律, 量子理论的诞生恰好说明了这一实验规律。

13.6.2 玻尔的氢原子理论

为了建立适合微观过程的原子理论, 玻尔在总结前人工作的基础上, 于 1913 年对揭示原子光谱线的巴耳末公式(13-63)给出解释。提出如下 3 条假设:

① 按照卢瑟福核式结构模型, 玻尔进一步假设: 电子在原子中不可能沿着经典理论所允许的每一个轨道运动, 而只能沿着其中一组特殊的轨道运动。玻尔假设的在这一组特殊轨道运动的电子处于稳定状态(简称定态), 相应的能量分别为 E_1, E_2, E_3, \dots ($E_1 < E_2 < E_3 < \dots$)。

② 当电子保持在稳定状态时, 它既不吸收也不发出辐射电磁波。只有当电子从一个定态(轨道)跃迁到另一个定态(轨道)时, 才产生辐射的吸收或发射现象。电子从一个能量为 E_m 的定态跃迁到另一个能量为 E_n 的定态时, 要所吸收或发射频率为 ν 的电磁波, 且满足下面关系:

$$\nu = \frac{|E_n - E_m|}{h} \quad (13-66)$$

此式即为频率条件。

③ 为了确定电子运动轨道，玻尔还提出量子化条件：在电子绕核做圆周运动的稳定状态中，其角动量 L 必须是 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ 的整数倍。即

$$L = mvr = n\hbar, \quad n=1,2,3,\dots \quad (13-67)$$

式中， \hbar 是约化普朗克常数， n 为正整数，称为量子数，该式也称为角动量量子化条件。

下面，从玻尔理论出发求氢原子轨道半径和能量。设氢原子中电子质量为 m ，电荷为 e ，在其半径为 r_n 的稳定轨道上以速率 v 做圆周运动。由第一条假设，因为电子做圆周运动的向心力为氢原子核与电子的库仑力所提供的，因此，由式 (13-64) 有

$$m \frac{v^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} \quad (13-68)$$

又由式 (13-67) 角动量量子化条件，得

$$v_n = \frac{n\hbar}{mr_n}, \quad n=1,2,3,\dots \quad (13-69)$$

联立式 (13-68)、式 (13-69)，得

$$r_n = n^2 \left(\frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m e^2} \right) = a_0 n^2, \quad n=1,2,3,\dots \quad (13-70)$$

这就是原子中第 n 个稳定轨道的半径。其中 $a_0 = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m e^2}$ ，是 $n=1$ 时氢原子轨道半径，将已知量 (ϵ_0 、 \hbar 、 m 、 e) 代入计算得到 $a_0 = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$ ，这是氢原子核外最小轨道半径，称为**玻尔半径**。由式 (13-70) 可知，电子绕核运动的轨道半径的可能值为 a_0 ， $4a_0$ ， $9a_0$ ， $16a_0$ ， \dots 即电子轨道与量子数 n 的平方成正比，其量值是不连续的，如图 13.16 所示。

当电子在半径为 n 的轨道上运动时，氢原子系统的能量 E_n 等于原子核与轨道电子这一带电系统的静电势能和电子的动能之和，若以电子在无穷远处的静电势能为零，则

$$E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{n^2} \left(\frac{m e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \right) \quad (13-71)$$

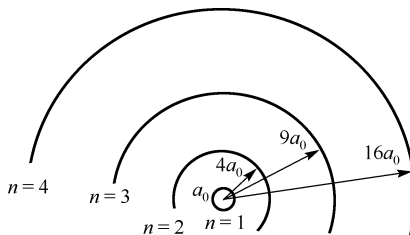


图 13.16 氢原子处于各定态时电子轨道的量子数及尺寸

从该式可见，氢原子能量也只能取分离值，即能量也是量子化的，而且能级间隔随量子数 n 的增大而迅速减小。当 n 很大时，能级间隔非常小，以致能量可看作是连续变化的。

由式 (13-71) 可知， $E_1 = m e^4 / 8 \epsilon_0^2 \hbar^2 = -13.6 \text{ eV}$ ，这是把电子从氢原子的第一个玻尔轨道 ($n=1$) 移到无限远处所需的能量值， E_1 就是电离能，该值与实验测得的电离能值十分吻合。进一步取 $n=1,2,3,\dots$ 时可得到氢原子其他各能级的能量为

$$E_1, E_2 = E_1/4, E_3 = E_1/9, \dots \quad (13-72)$$

上述各能级与各电子轨道相对应, 氢原子处于 $n=1$ 的能级能量最低, 对应的状态叫做基态(也即是电子常驻状态)。当电子受到激发时, 可以从基态跃迁到较高的 E_2 、 E_2 、 E_3 、 \dots 能级上, 这些能级对应的状态叫激发态。

此外, 玻尔还假定当电子从一个稳定能级跃迁到另一个稳定能级时, 原子发射(或吸收)单色光, 光子频率为

$$\nu = \frac{|E_n - E_m|}{h} \quad (13-73)$$

由式(13-71)和式(13-73)可得其波数为

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{|E_n - E_m|}{hc} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (13-74)$$

显然, 该式与氢原子光谱的经验公式(13-63b)比较可得里得堡(Rydberg)常量为

$$R_H = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} \quad (13-75)$$

R_H 的这个理论值(由更基本的 m 、 e 、 c 、 h 常量计算值)与实验值十分吻合。

氢原子中电子从各能级跃迁的谱线如图 13.17 所示。其中核外电子自 $n > 2$ 的各较高能级向 $n' = 2$ 的能级跃迁时产生的谱线, 即为巴耳末系。核外电子自 $n > 3$ 的各较高能级向 $n' = 3$ 的能级跃迁时产生的谱线, 即为帕邢系。另外, 由玻尔理论还可预言: 当氢原子自不同的较高能级过渡到与 $n' = 1, 4, 5, \dots$ 量子数所相应的能级时, 就可得到新的谱线系。事实上, 在 1915~1924 年间, 莱曼(T.Lyman)、布拉开(P.Bracktt)、普丰德(A.H.Pfund)等人陆续在紫外区域和红外区域发现了这些谱线系, 分别为紫外的莱曼系($n' = 1$), 和红外的布拉开系($n' = 4$)和普丰德系($n' = 5$)。

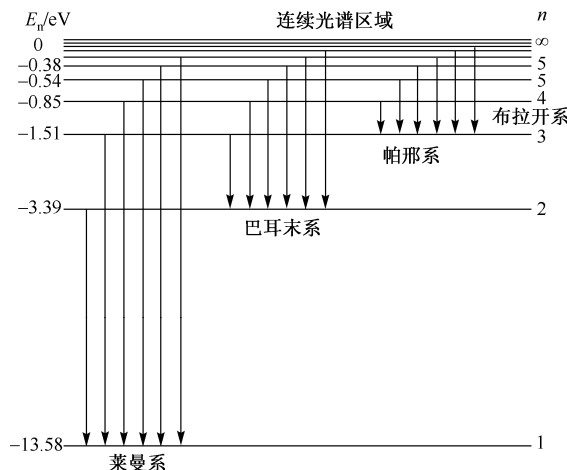


图 13.17 氢原子光谱中不同线系的产生

在理解玻尔的上述理论时，要注意在某一瞬时，一个氢原子只能发射与某一谱线相对应的一定频率的一个光子。不同受激状态的氢原子在跃迁到基态或其他较低激发态时才分别发射与不同谱线相对应的光子。一般在实验中观察到的是大量处于不同受激态的原子所发的光，所以能观察到若干条不同的谱线。

玻尔理论不仅能成功地说明氢原子的光谱，对类氢离子（只有一个电子绕核转动的离子，如 He^+ 、 Li^{2+} 、 Be^{3+} 、 \dots ）的光谱也能很好地说明。由此可见，玻尔理论在一定程度上反映单电子原子系统的客观实际。

例 13-10 计算氢原子中的电子从量子数 n 的状态跃迁到量子数 $k = n - 1$ 的状态时所发射的谱线频率。并证明当 n 很大时，该频率即等于电子在量子数为 n 的轨道上绕转的频率。

解 由式 (13-74) 求得频率为

$$\begin{aligned} \nu_{n,n-1} &= \frac{1}{\lambda} = \frac{|E_n - E_m|}{hc} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{me^4(2n-1)}{8\varepsilon_0^2 h^3 n^2 (n-1)^2} \end{aligned}$$

当 n 很大时， $\nu_{n,n-1} \approx \frac{me^4}{4\varepsilon_0^2 h^3 n^3}$ 。

电子在半径为 r_n 的圆开有轨道上绕转的频率 ν 为

$$\nu = \frac{v_n}{2\pi r_n} = \frac{mv_n r_n}{2\pi m r_n^2} = \frac{me^4}{4\varepsilon_0^2 n^2}$$

所以，当 n 很大时， $\nu_{n,n-1} \approx \nu$ 。

因为按照经典理论，做圆周运动的电子辐射的频率就等于它绕转的频率，所以本题也说明了玻尔的对对应原理。当量子数 n 很大时，量子物理方程就过渡到经典物理方程，量子图像与经典图像完全相同。所以，可以把经典物理看作是量子物理在量子数很大时的极限情况。

13.6.3 玻尔理论的缺陷

玻尔理论虽然取得了一些成就，但也存在着很大的困难。将该理论应用到仅次于氢原子的氦原子时为，结果与实验不符。即使对于氢原子，该理论也只能求出谱线的频率，而不能求出谱线的强度。

玻尔理论的这些缺陷，主要是由于把微观粒子（电子、原子等）看作是经典力学中的质点，从而把经典力学规律用在微观粒子上所致。直到 1924 年德布罗意揭示出微观粒子具有根本不同于宏观质点的波粒二象的性质后，一个较完整的描述微观粒子运动规律的理论——量子力学才逐步建立起来。以下部分具体介绍量子力学理论在氢原子中的应用。

13.6.4 氢原子的量子力学理论

在氢原子问题中，电子与核在库仑力的相互作用下运动，这是一个两体问题，其具体的运算是十分复杂的，超出了本教材的范围，因此，这里只简要地介绍量子力学定态问题的处理方法。

设氢原子中电子的质量为 m ，电荷为 $-e$ ，它与核之间的距离为 r ，若取核为原点 O ，则氢原子中的势能为 $E_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ ，因而在一般情况下，氢原子为一稳定状态系统，故由式 (13-33b) 可得氢原子波函数满足的定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E\right)\psi = 0 \quad (13-75)$$

现在从式 (13-75) 求解出波函数 ψ ，以及通过 $|\psi|^2$ 来找到电子在空间任意点 (x, y, z) 的概率。为了方便求解，下面写出球坐标系中的定态薛定谔方程：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \\ & + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0 \end{aligned} \quad (13-76)$$

式中 $\psi = \psi(r, \theta, \varphi)$ ，而势能仅为 r 的单值函数，所以，可用分离变量法将波函数写成

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

其中 $R(r)$ 只是径向的函数， $\Theta(\theta)$ 和 $\Phi(\varphi)$ 是角向部分的分量。这样将 $\psi = \psi(r, \theta, \varphi)$ 代入到式 (13-76) 中，再用 $R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ 除，并乘以 $r^2 \sin \theta$ ，经过一系列计算、化简整理可得

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{8\pi^2 m}{h^2} r^2 \sin^2 \theta \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \\ & + \frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \end{aligned} \quad (13-77)$$

式 (13-77) 恒等的条件是等式两边均为一相同的常数，设此常数为 m_l^2 。从而，式 (13-77) 可写为

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{8\pi^2 m}{h^2} r^2 \sin^2 \theta \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \\ & + \frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = m_l^2 \end{aligned} \quad (13-78)$$

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = m_l^2 \quad (13-79)$$

式 (13-78) 又可写成

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{8\pi^2 m}{h^2} r^2 \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = \frac{m_l^2}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right)$$

上式左边为 r 的函数, 右边为 θ 的函数, 故上式恒等的条件是等式两边均为同一常数。设此常数为 $l(l+1)$, 这样又得到

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{8\pi^2 m}{h^2} r^2 \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = l(l+1) \quad (13-80)$$

$$\frac{m_l^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = l(l+1) \quad (13-81)$$

通过解上面三个常微分方程就可得到 $R(r)$ 、 $\Theta(\theta)$ 、 $\Phi(\varphi)$ 的解, 从而得到波函数 $\psi = \psi(r, \theta, \varphi)$ 的解。上述 m_l 、 l 都是在分离变量过程中引入的常数, 下面结合波函数必须满足的标准化条件及归一化条件讨论常数 m_l 、 l 的物理意义。

13.6.5 量子条件和量子数

在求解式 (13-79) ~ 式 (13-81) 时, 很自然地得到氢原子的一些量子化特性。

(1) 能量量子化和主量子数

氢原子波函数的径向部分由方程式 (13-81) 确定, 求解时, 利用 $R(r)$ 函数的标准化条件和氢原子能量必须满足的量子化条件, 可得到

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \left(\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \right) = -13.6 \frac{1}{n^2} \text{ eV} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (13-82)$$

式中 n 称为主量子数, 这与玻尔得到的式 (13-71) 是一致的。这表明由量子力学的薛定谔方程解得的能量值, 与玻尔理论所得结果是相同的。 $n=1$ 时氢原子处于基态, $n>1$ 时氢原子处于激发态。

(2) 角动量量子化和角量子数

求解氢原子波函数的角函数部分方程式 (13-79)、式 (13-81), 可得到氢原子中电子的角动量 L 为

$$L = l(l+1) \frac{h}{2\pi} \quad (13-83)$$

式中, $l=0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$, 称为角量子数。它描述电子相对于核运动的角动量 (也是玻尔所说的“轨道”角动量), 由该式可以看出, 这与玻尔理论给出的式 (13-67) $L = n\hbar$ 不同。

按照量子力学理论,角动量的最小值为零,而玻尔理论的最小值为 \hbar 。实验证明,量子力学的结果是正确的。此外,在量子力学理论中,角量子数要受主量子数的限制。例如,当 $n=1$ 时, l 只能取0;而当 $n=2$ 时, l 只能取0和1,而不能取其他值。

(3) 空间量子化与磁量子数

求解薛定谔方程还指出,电子绕核运动的角动量可由式(13-83)确定其大小,由于角动量是一矢量。但 L 的方向在空间的取向不能连续地改变,而只能取一些特定的方向,即角动量 L 在外磁场方向的投影必须满足量子化条件

$$L_z = m_l \hbar \quad (13-84)$$

式中, $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$,称为角动量磁量子数,简称为磁量子数。由该式可见,对于一给定的角量子数 l , m_l 可取 $(2l+1)$ 个值, l 越大, m_l 的取值越多。例如,当 $l=1$ 时, $m_l = 0, \pm 1$,共有三个取值,表示角动量在空间有三种可能取向;当 $l=2$ 时, $m_l = 0, \pm 1, \pm 2$,共有五个取值,即表示角动量在空间有五种可能取向。图13.18画出了 $l=1, 2$ 的电子轨道角动量空间取向量子化的示意图。

综上所述,氢原子中电子的稳定状态是用一组量子数 n 、 l 、 m_l 来描述的,在一般情形下,电子的能量主要取决于主量子数 n ,与角量子数 l 只有微小关系。在无外磁场时,电子能量与磁量子数 m_l 无关。因此,电子的状态可以用 n 、 l 来描述。习惯上常用s、p、d、f等字母分别表示 $l=0, 1, 2, 3$ 等状态。具有角量子数 $l=0, 1, 2, 3, \dots$ 的电子常分别称为s电子、p电子、d电子及f电子等。

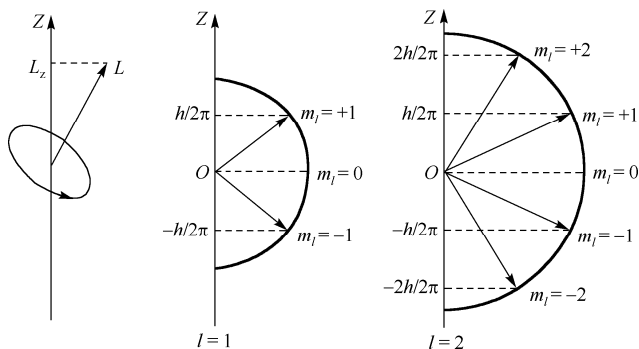


图 13.18 角动量的空间量子化

13.6.6 氢原子核外电子定态波函数

氢原子核外电子的状态由 n 、 l 、 m_l 来描述。其定态波函数为

$$\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \varphi) = R_{n,l}(r) \Theta_{l,m_l}(\theta) \Phi_{m_l}(\varphi) \quad (13-85)$$

对于不同的 n 、 l 、 m_l 值,波函数 $\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \varphi)$ 的具体表示方式不同,通过计算,在表13.1中列出了 $n \leq 3$ 的径向波函数 $R_{n,l}(r)$,及 $l=0 \sim 2$ 的 $\Theta_{l,m_l}(\theta)$ 、 $\Phi_{m_l}(\varphi)$ 函数。

表 13.1 氢原子的定态波函数 (a_0 为玻尔半径)

n	l	m_l	$R_{n,l}(r)$	$\Theta_{l,m_l}(\theta)$	$\Phi_{m_l}(\varphi)$
1	0	0	$\frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
2	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}a_0^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/2a_0}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
2	1	0	$\frac{1}{2\sqrt{6}a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}$	$\sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
2	1	± 1	$\frac{1}{2\sqrt{6}a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}$	$\sqrt{\frac{3}{4}} \sin \theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i\varphi}$
3	0	0	$\frac{2}{3\sqrt{3}a_0^{3/2}} \left[1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2}{27} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2\right] \frac{r}{a_0} e^{-r/3a_0}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
3	1	0	$\frac{8}{27\sqrt{6}a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} \left(1 - \frac{r}{6a_0}\right) e^{-r/3a_0}$	$\sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
3	1	± 1	$\frac{8}{27\sqrt{6}a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} \left(1 - \frac{r}{6a_0}\right) e^{-r/3a_0}$	$\sqrt{\frac{3}{4}} \sin \theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i\varphi}$
3	2	0	$\frac{4}{81\sqrt{30}a_0^{3/2}} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/3a_0}$	$\sqrt{\frac{5}{8}} (3\cos^2 \theta - 1)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
3	2	± 1	$\frac{4}{81\sqrt{30}a_0^{3/2}} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/3a_0}$	$\sqrt{\frac{15}{4}} (\sin \theta \cos \theta)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i\varphi}$
3	2	± 2	$\frac{4}{81\sqrt{30}a_0^{3/2}} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/3a_0}$	$\sqrt{\frac{15}{16}} \sin^2 \theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm 2i\varphi}$

波函数绝对值的平方 $|\psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\varphi)|^2$ 给出电子处于由 n 、 l 、 m_l 决定态时在空间各点 (r,θ,φ) 出现的概率密度。 r,θ,φ 不同, $|\psi|^2$ 平方就不相等, 为了形象地说明这种分布情况, 可以使用电子云的概念。 $|\psi|^2$ 大的地方就把电子云画得浓密一些, 否则就画得淡一些。电子云浓密的地方表示找到电子的概率大一些, 电子云淡的地方表示找到电子的概率就小一些; 因此电子云图就是概率分布的一种形象化的图像描述。

应当指出, 氢原子在基态时电子的分布, 从玻尔理论来看电子应处于半径为 a_0 的圆形轨道上, 但从量子力学来看, 电子处于 $r \rightarrow 0$ 到 $r \rightarrow \infty$ 之间的任意位置, 只不过电子在 $r = a_0$ 处附近相对概率大而已。如图 13.19 所示, 为氢原子基态时电子云分布模型与玻尔理论模型结果的比较。

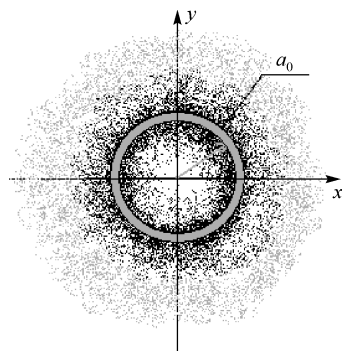


图 13.19 氢原子基态时电子云分布模型与玻尔理论模型结果的比较

13.6.7 电子自旋

自旋角动量和自旋磁矩是基本粒子的一种固有属性,已经被许多直接或间接的实验证实。1925年,基于碱金属光谱的双线结构和反常塞曼效应等实验事实,乌伦贝克(G.E.Uhlenbeck)和古德斯密特(S.A.Goudsmit)提出电子具有自转(其“自旋”这名词也由此而来)的假说:电子在自旋过程中,也有自旋角动量。与轨道角动量一样,自旋角动量也是量子化的,以 \mathbf{S} 表示自旋角动量,则其值为

$$S = \sqrt{s(s+1)} \frac{h}{2\pi} \quad (13-86)$$

式中, s 为自旋角动量量子数,简称为自旋量子数,由量子力学计算和实验得到, $s=1/2$ 。故电子自旋角动量 \mathbf{S} 的值为 $\sqrt{3/4}h/2\pi$ 。

在提出电子自旋假设之前,1921年,斯特恩(O.Stern)和盖拉赫(W.Gerlach)在非均匀磁场中观察一些处于 s 态的原子射线束时发现一束分为两的现象。由于 s 态的原子中电子绕核运动的磁矩和动量矩都为零,所以这种分裂不能用电子轨道运动的空间取向量子化来加以解释。

现在,关于电子自旋已经确定下列实验事实:

① 自旋角动量 \mathbf{S} 在任何方向的投影只能取量子化数值:

$$S_z = m_z h, \quad m_z = \pm \frac{1}{2} \quad (13-87)$$

式中 m_z 称为自旋磁量子数;

② 每个电子具有自旋磁矩 \mathbf{M}_s ,其自旋磁矩 \mathbf{M}_s 和自旋角动量 \mathbf{S} 的比值为

$$\frac{\mathbf{M}_s}{\mathbf{S}} = \frac{-e}{m_e}, \quad (13-88)$$

式中, m_e 是电子质量, $-e$ 是电子电荷。 \mathbf{M}_s 在空间任意方向上的投影只能取两个数值:

$$M_{sz} = \pm \frac{e\hbar}{2m_e} = \pm \mu_B \quad (13-89)$$

式中, $\mu_B = 0.927 \times 10^{-27} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ 是玻尔磁子。在引入电子自旋的概念后,斯特恩-格拉赫实验结果得到了很好的解释。

综上所述,氢原子核外电子的状态可由四个量子数 n 、 l 、 m_l 、 m_z 来确定,其中

① 主量子数 $n=1,2,3,\dots$,主要决定电子在原子中的能量,且量子化取值由式(13-82)确定;

② 角量子数 $l=0,1,2,\dots(n-1)$,决定了电子绕核运动的角动量 L ,由式(13-83)确定;

③ 磁量子数 $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ ，决定了电子绕核运动的角动量矢量在外磁场中的分量 L_z 是量子化取值，由式 (13-84) 确定；

④ 自旋磁量子数 $m_s = \pm 1/2$ ，决定了电子自旋角动量矢量 \mathbf{S} 在外磁中的分量 S_z ，是量子化取值，由式 (13-86) 确定。

通过以上讨论知道，量子力学可以从理论上计算出氢原子的能量，氢原子的光谱，也可计算氢原子的激发寿命，其理论结果与实验很好地吻合。

通过上述对量子力学最基本概念的简单介绍，以及对微观粒子的一些特有属性和规律的讨论，使我们对微观粒子的运动有了一些初步的认识，量子力学不仅建立了微观运动规律的理论，而且对实践也有重大的指导作用。例如，在半导体、电子学、高能物理领域中量子力学为它们提供了必要的基础理论。

例 13-11 计算电子自旋角动量在外磁场中所有可能取的角度。

解 由 $S = \sqrt{s(s+1)} \frac{h}{2\pi}$ 和 $S_z = m_s \hbar$ (其中, $s = 1/2$, $m_s = \pm 1/2$) 可得,

$$\cos \theta = \frac{S_z}{S} = \frac{m_s}{\sqrt{s(s+1)}} = \frac{\pm 1/2}{\sqrt{3/4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

*13.7 夫兰克-赫兹实验

1914 年，弗兰克 (F.Franck) 和赫兹 (G.Hertz) 用低能电子轰击稀薄气体的原子，研究低能电子与原子碰撞前后相互作用和能量传递的过程，发现在充汞的放电管中，透过汞蒸气的电子流随电子的能量显现出有规律的周期性的变化，能量间隔为 4.9 eV，并拍摄到与能量 4.9 eV 相应的 253.7 nm 的发射光谱线。对此，他们提出了原子中存在“临界电势”的概念，当电子能量低于与临界电势相应的临界能量时，电子与原子的碰撞是弹性的，而当电子能量达到这一临界能量时，碰撞过程由弹性过程转变为非弹性过程，电子把这份特定的能量转移给原子，使之受激。原子退激时，再以特定频率的光量子的形式辐射出来，这可用爱因斯坦于 1905 年提出的光量子假设 (光电效应) 来说明，即电子损失“临界电势”的能量。电子损失的这部分能量 ΔE 等于光量子能量，即光子频率 ν 与普朗克常数 h 的乘积

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv^2 = eU = h\nu \quad (13-90)$$

由此，他们计算出 $h = 6.59 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$ ($1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$)，这与普朗克于 1901 年发表的常数 $h = 6.55 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$ 较为吻合。弗兰克-赫兹实验用非光学方法证实了原子内部能量是量子化的。这一实验事实成为玻尔 (1913 年发表的) 原子理论的基础，它是量子理论的一个重要实验。

1920 年，弗兰克及其合作者对原先的装置做了改进，提高了分辨率，测得了汞除了

4.9 eV 能级以外的较高激发能级和电离能级,进一步证实了原子内部能量是量子化的。1925 年,弗兰克和赫兹因为这一杰出的贡献共同获得当年诺贝尔物理学奖。

2. 弗兰克-赫兹实验原理

进行弗兰克-赫兹(F-H)实验通常使用的碰撞管是充汞的,如图 13.20 所示。采用充汞碰撞管是因为汞是单原子分子,是一种易于操纵的物质,常温下汞是液体,饱和蒸气压很低,加热就可改变它的蒸气压;汞的原子量较大,和电子做弹性碰撞时几乎不损失动能;汞的第一激发能级较低(约为 4.9 eV),只需几十伏电压就能观察到多个峰值。当然,除用汞以外,还常采用充惰性气体(如氖、氩等)的碰撞管。用这些碰撞管,温度对气压影响不大,并且在常温下就可以进行实验。

图 13.20 所示为实验装置示意图,在一充有待测元素原子气体(如汞、氩)的碰撞管内,电子由热阴极 K 发出,在阴极 K 和栅极 G 之间加正电位 U_{GK} 使电子加速,而在 G 极与接收极 P 之间加反向电压 U_{GP} ,当电子通过 KG 空间进入 GP 空间时,如果电子获得的动能 $\left(E_k = \frac{1}{2}mv^2\right)$ 大于 eU_{GP} ,就能克服反向电场的作用穿过栅极而到达 P 极,成为通过电流计的电流 I_p , I_p 值的大小反映了从阴极最后到达接收极的电子数。

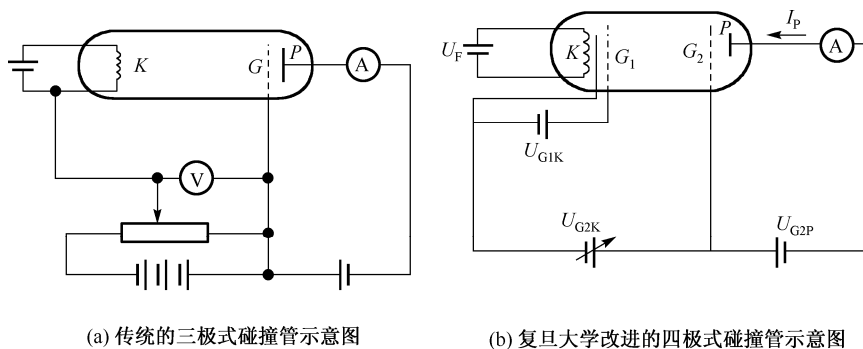


图 13.20 F-H 实验原理图

实验时, U_{GK} 从零逐渐增加,同时观察电流计的电流。当 U_{GK} 较低时,由于电子动能 E_k 小于原子的激发能 ($E_2 - E_1$),电子在加速过程中虽然不断与气体原子碰撞,但不能激发原子,它们之间只发生弹性碰撞,电子不损失能量。因此,从阴极发出的电子与气态汞原子发生多次碰撞后到达栅极时仍有足够的动能 E_k 克服反向电压 U_{GP} 的阻碍向板极运动,形成板极电流 I_p ,并且 I_p 随 U_{GK} 的增加而增大。

直到加速电压 U_{GK} 等于或稍大于被测元素原子的第一激发电位,这时在栅极附近电子的动能等于或大于原子的第一激发能 ($E_2 - E_1$),电子就在此处与原子发生非弹性碰撞,

汞原子几乎吸收电子的全部动能，使原子由基态激发到某一激发态，这些电子由于损失了能量，不能克服反向电场 U_{GP} 的作用，即

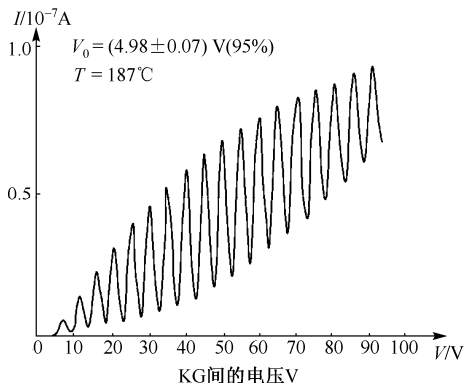
$$E_k - (E_2 - E_1) < eU_{GP} \quad (13-91)$$

因此，电子无力到达接收极，所以这时电流 I_p 开始较快地下降，从而出现第一个波谷。继续增加 U_{GK} ，在距栅极某一定距离处，电场已达到第一激发电位 U_g 值，于是电子在该处就再次与第二个汞原子发生非弹性碰撞，电子几乎又一次把全部动能传递给汞原子，而使电子丧失动能，板极电流 I_p 也再次减小，于是出现第二个波谷，类似的情况随 U_{GK} 增加而重复出现。

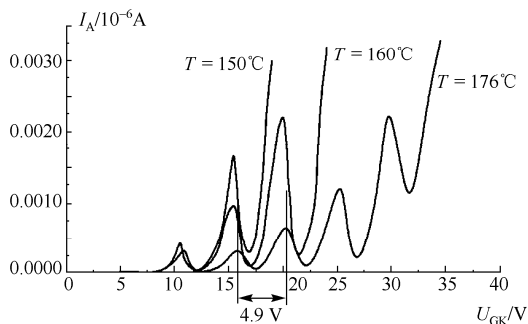
在电子与汞原子每发生一次非弹性碰撞之后，由于加速电场继续作用在电子上，电子将重新获得动能到达栅极，并克服反向电场的作用到达 P 极，所以电流又开始增大。显然，加速电位 U_{GK} 越大，发生第一次非弹性碰撞距阴极越近。例如，当 $U_{GK} = 2U_g$ 时，第一次非弹性碰撞就在 K 极与 G 极之间一半的地方发生，而在剩下的一半路程中电子重新获得电子跃迁到第一激发态所需的能量，因而就在栅极附近发生第二次非弹性碰撞，从而损失定向运动的速度，同时反向电场阻止电子到达 P 极，电流再度下降。由此可见，随着加速电位 U_{GK} 值的增大，电子在阴极到栅极的整个路程上接连多次发生非弹性碰撞而激发其他原子，这样电子到达栅极时所具有的剩余动能，是以原子激发能的大小为上限。随加速电压 U_{GK} 的增加而做周期性变化，能克服反向电压到达板极的电子数，即板流 I_p 就指示出一系列周期性的极大值与极小值。与两个相邻的板流的极大值（或极小值）对应的加速电压之间的电位差即为被测原子的第一激发电位

$$E_2 - E_1 = e(U_{GK}^n - U_{GK}^{n-1}) = eU_g \quad (13-92)$$

汞原子第一激发电位的公认值 $U_g = 4.9 \text{ V}$ 。图 13.2 所示为汞原子在不同蒸气压下的 $I_p - U_{GK}$ 实验曲线，可见，电流值随加速电压增加而具有周期性极大、极小的变化，各峰值的电压差反映了能级之间的能量差。



(a) 复旦大学生产的改进四极式 F-H 管所做的汞原子的第一激发电能态曲线。



(b) 是用传统的三极式 F-H 管测量的汞原子在不同温度下的 $I_p - U_{GK}$ 实验曲线。

图 13.21 汞原子的 $I_p - U_{GK}$ 实验曲线

受激发的汞原子从第一激发态跃迁到基态时,就会有光发射出来,所发射的光的波长可由式(13-92)计算,对于汞原子,波长为

$$\lambda = \frac{ch}{E_2 - E_1} = \frac{3 \times 10^8 \times 6.63 \times 10^{-34}}{4.9 \times 1.6 \times 10^{-19}} \text{ nm} = 2.54 \times 10^2 \text{ nm} \quad (13-93)$$

这就是本节开始提到的,1914年,弗兰克和赫兹用低能电子轰击稀薄气体汞原子时测到的光谱。弗兰克和赫兹实验表明,原子能级确实存在,要把原子激发到激发态须要吸收一定数值的能量,而这些能量是不连续的,是量子化的。从而无可辩驳地证实了原子能级存在分立的事实。

3. 弗兰克-赫兹汞原子的 $I_p - U_{GK}$ 实验曲线(见图 13.21)的说明

(1) 接触电位差的影响

F-H 管阴极、栅极和板极往往采用不同的金属材料,因此会产生接触电位差,使真正加到电子上的加速电压不等于 U_{GK} , 而是 U_{GK} 与接触电位差的代数和。所以接触电位差的存在会使 $I_p - U_{GK}$ 曲线向右偏移 U'_0 。

(2) 热电子发射的影响

由于阴极发出的热电子能量服从麦克斯韦统计分布规律,因此 $I_p - U_{GK}$ 曲线中板流的下降不是陡然的,而是在极大、极小值附近出现的“峰”、“谷”有一定宽度。

(3) 碰撞几率的影响

由于电子与稀薄原子碰撞有一定几率,即一部分电子与原子发生非弹性碰撞损失能量后,不能克服拒斥电压到达板极,从而造成板流下降;而另一部分电子未与原子发生非弹性碰撞,因此能够到达板极形成板流,所以板极电流下降但不为零,又因加速电压越高电子的能量就越大,电子与被测原子的碰撞几率就越小,因此“谷”点电流值随着加速电压的增大而增大。

4. 思考题

- (1) 玻尔原子结构理论的主要内容是什么?
- (2) 在 F-H 管内为什么要在板极和栅极之间加反向拒斥电压?
- (3) 在 F-H 管的 $I_p - U_{GK}$ 曲线上第一个峰的位置,是否对应于被测原子的第一激发电位?为什么?
- (4) 为什么电流 I_p 不会降到零?试绘出 $I_p - U_{GK}$ 理想曲线。

本章提要

1. 斯特藩-玻耳兹曼定律

$$M_u(T) = \sigma T^4$$

2. 维恩 (W. Wien) 位移定律

$$T\lambda_m = b$$

3. 瑞利-金斯公式

$$E(\nu)d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2 d\nu$$

4. 普朗克量子假设

对频率为 ν 的电磁振子, 最小能量为: $\varepsilon = h\nu = \hbar\omega$ 。式中 $h = 6.626\,069\,3(11) \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

普朗克常数, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ 。

5. 爱因斯坦的光电效应方程

$$h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + A$$

6. 红限频率

$$\nu = \frac{A}{h}$$

7. 康普顿散射公式

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta)$$

8. 光的波粒二象性

$$\varepsilon = h\nu; \quad p = h/\lambda$$

9. 实物粒子的波粒二象性

粒子的能量: $E = mc^2$

粒子的动量: $p = mv = \frac{h}{\lambda}$

10. 不确定关系, 它是波粒二象性的表现

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar; \quad \Delta E \Delta t > \hbar$$

11. 概率波

物质波在各处的强度确定光子或实物粒子出现的概率密度。空间某点波函数的模的平方表示粒子在该点附近出现的概率。

12. 薛定谔方程

量子力学的基本方程, 薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + E_p(x,y,z)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

定态薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + (E_p - E)\psi = 0$$

在量子力学中,用来描述微观粒子状态的波函数是时间和空间的单值函数。空间某点波函数的模的平方表示粒子在该点附近出现的概率。根据对波函数的统计诠释,要求波函数 ψ 必须是单值、有限、连续函数,且满足归一化条件。

13. 一维无限深势阱中粒子的能级

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{8ma^2}, \quad n = \text{整数}$$

14. 四个量子数: 描述原子中电子运动状态的参数

(1) 能量量子化

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \left(\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \right) = -13.6 \frac{1}{n^2} \text{ eV}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

式中 $n=1,2,3,\dots$ 为主量子数,它决定电子在原子中的能量。

(2) 角动量量子化, 且是量子化取值

$$L = l(l+1) \frac{\hbar}{2\pi}$$

式中 $l=0,1,2,3,\dots,(n-1)$,称为角量子数,它决定了电子绕核运动的角动量 L 。

(3) 空间量子化与磁量子数

角动量 L 在外磁场方向的投影必须满足量子化条件

$$L_z = m_l \hbar$$

磁量子数 $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l$ 是量子化的,它决定电子绕核运动的角动量矢量在外磁场中的分量 L_z 。

(4) 自旋角动量 \mathbf{S} 在任何方向的投影只能取量子化数值

$$S_z = m_s \hbar, \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

式中 m_s 称为自旋磁量子数。

15. 氢光谱

$$\text{频率条件: } \nu = \frac{E_i - E_f}{h}$$

$$\text{波数公式: } \tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (k < n)$$

式中 R 为里德伯常量。

16. 原子中电子排列规则

(1) 泡利不相容原理;

(2) 能量最小原理。

阅读材料

电子显微镜

微观粒子的波动性已经在现代科学技术上得到应用。一个常见的应用例子就是电子显微镜。电子显微镜是根据电子光学原理，首先是电子与物质相互作用，使电子透过样品或在样品上反射而获得相关的衍射光速；其次是电子经过电场和磁场的聚焦（电子透镜代替光学透镜）作用，显示出物质材料的结构图像。电子与物质相互作用信息如图 13.22(a) 所示。这种图像能使物质的细微结构在非常高的放大倍数下成像，而显示出物质材料的结构图像。的通常电镜大致可分为 3 种类型：透射式电镜（TEM）、扫描式电镜（SEM）和扫描透射式电镜（STEM）。（TEM/SEM）这是两种基本类型的电子显微镜，其基本原理如图 13.22(b) 所示。

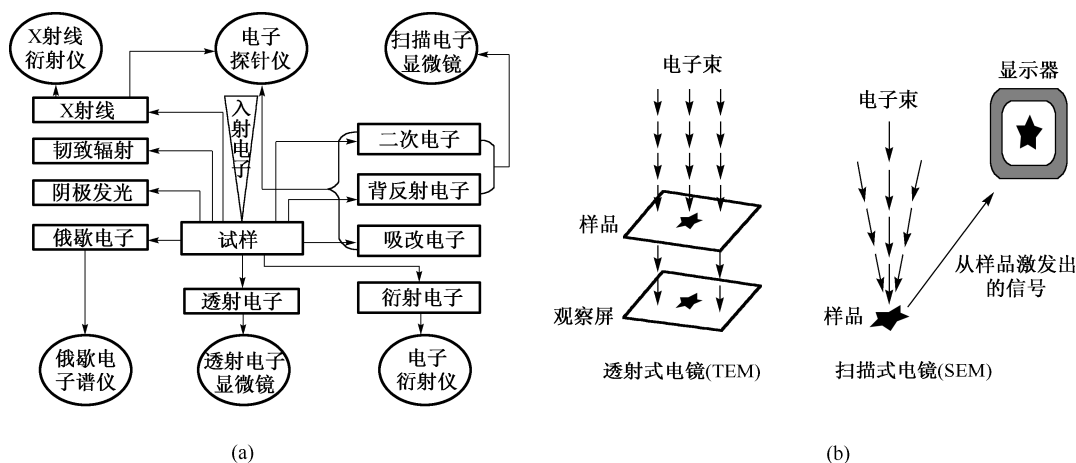


图 13.22 (a) 电子与物质相互作用产生的信息；(b) 两种基本类型的电镜成像

1. 透射式电镜（TEM）

透射电镜是靠穿透样品的电子束进行成像放大的，样品内部的结构是通过空间密度不同反映出来的，密度大的地方阻挡和吸收的电子多，透过电子少；结构稀疏处密度小，透过电子多。这样在透射电子束的横截面上电子密度的疏与密的分布便对应了样品结构密度的密与疏的关系，也就是说，透过电子束的密度变化也包含了样品结构的信息，见图 13.22(a) 所示。透射式电镜研制最早，使用最为广泛，具有以下几个特点：①成像分辨率最高，现在研制的 TEM 已达到 0.1 nm；②对样品厚度有一定要求，通常在 30~50 nm 左右，太厚

则电子束不易穿透，无法满足观察和拍摄时对亮度的要求，且样品结构重叠过多，会影响影像清晰度；样品太薄则影响对电子束照射轰击的耐受性，造成热损伤和污染；③放大率的范围相对来说较窄，由于透射工作方式的特点，一般不能从高倍率连续变化到很低的倍率，通常在几百倍以下放大时必须更换透镜的工作方式（由仪器自动切换）。

2. 扫描式电镜（SEM）

扫描电镜是把电子束会聚成很细的束点，称为电子探针（实际上要远比针尖更为尖细得多），象写字一样逐行逐点地在样品表面扫描，然后把激发出来的二次电子收集起来，将二次电子所携带的样品表面的信息处理成影像，在显示器上显现出来，成像的方式是间接的，如图 13.22(b)所示。SEM 的使用相当广泛，研制工艺也比较成熟。特点如下：①由于电子探针没有穿过样品内部，只在表面激发出二次电子，所以主要被用来观察样品表面或断裂面的结构形态；②景深比（TEM）长，富有立体感；③放大率范围宽，可以从几十倍连续变化到几十万倍；④对样品制作要求简单，适应性强；甚至有些硬质干燥的样品几乎可以不用处理而直接观察；⑤由于电子探针不停地做扫描运动，不会长久地对样品上所有点同时轰击，所以对样品的损伤远比（TEM）小得多；⑥样品室活动范围大，对样品的大小、高度和形态的适应性强；（TEM）样品通常只能装载在直径 3 mm 左右的铜网上，而 SEM 的样品室甚至可以容载下直径 10 cm 的样品；⑦分辨率低于同档次的（TEM）。

3. 扫描透射式电镜（STEM）

扫描透射式电镜也是利用电子探针在样品表面做扫描运动，但不接收二次电子，而是在样品另一面接收透过样品的透射电子，然后加以处理，显示出影像。最终像同（SEM）一样显现在显像管的荧光屏上。特点为：①成像较好，分辨本领介于 TEM 和 SEM 之间；②与 SEM 一样，对样品的损伤小；③要求样品较薄，以易于穿透；④能将透射电子中的弹性散射电子与损失了一定能量的非弹性散射电子区别，加以对比分析处理，得到（TEM）和（SEM）检测不到的信息；⑤尤其便于与 SEM 结合做同一部位的观察对比。

TEM 和 SEM 是电子显微镜的 2 种最基本类型，应用较为普及。STEM 的使用尚不是十分广泛，这种观察方式目前只在分析型电镜中使用，所谓分析型电镜即非单一的（TEM），也非单一的（SEM），是指综合了各种电镜的性能，能对多种电子信号进行综合分析处理的电子显微镜。

习题

13.1 光电效应和康普顿效应都包含电子和光子的相互作用过程。对此，有以下几种理解，正确的是（ ）。

- A. 两种效应中, 电子和光子组成的系统都服从动量守恒定律和能量守恒定律
 B. 两种效应都相当于电子和光子的弹性碰撞过程
 C. 两种效应都属于电子吸收光子的过程
 D. 光电效应是电子吸收光子的过程, 而康普顿效应则相当于光子和电子的弹性碰撞过程

13.2 氢原子中处于 3d 量子态的电子, 描述其量子态的四个量子数 (n, l, m_l, m_s) 可能取的值为 ()。

- A. (3, 1, 1, 1/2) B. (3, 2, 0, 1/2) C. (2, 1, 2, 1/2) D. (1, 0, 1, 1/2)

13.3 关于不确定关系 $\Delta x \Delta p \geq \hbar$, 以下几种理解, 正确的是 ()。

- A. 粒子的动量不能准确确定
 B. 粒子的动量和坐标不能同时准确确定
 C. 粒子的坐标不能准确确定
 D. 不确定关系仅适用于微观粒子, 不适用于宏观粒子

13.4 锂和汞的逸出功分别为 2.3 eV 和 4.5 eV, 如果用波长为 300 nm 的光照射, 试问哪种材料会出现光电效应? 光电子的最大动能为多少?

13.5 如果一个电子处于原子某能态的时间为 10^{-8} s, 那么该原子在该能态的能量的最小不确定量是多少? 设电子从上述能态跃迁到基态, 对应的能量为 3.39 eV, 试确定所辐射光子的波长及此波长的最小不确定量。

13.6 一个电子的总能量是它的静止能量的 5 倍, 问它的速率、动量、动能各为多少?

13.7 求出能够占据一个 d 分壳层的最大电子数, 并写出这些电子的 m_l 和 m_s 的值。

13.8 若电子和光子的波长均为 0.20 nm, 则它们的动量和动能各为多少?

13.9 如果一个电子处于原子某能态的时间为 10^{-8} s, 这个原子的最小不确定量是多少? 设电子从上述能态跃迁到基态, 对应的能量为 3.39 eV, 试确定所辐射光子的波长及这个波长的最小能量的不确定量。

13.10 钾的遏止频率为 4.62×10^{14} Hz, 今用波长为 435.8 nm 的光照射, 求从钾的表面上放出的光电子的初速度。

13.11 求速度 $v = \frac{c}{2}$ 的电子的物质波的波长。

13.12 在宽度为 a 的一维无限深势阱中, 当 $n=1, 2, 3$ 时, 求介于阱壁和 $a/3$ 之间粒子出现的概率。

13.13 He-Ne 激光器所发红光波长 $\lambda = 632.8$ nm, 谱线宽度 $\Delta\lambda = 10^{-9}$ nm, 求当这种光子沿 x 轴方向传播时, 它的 x 坐标的不确定度。

13.14 已知巴耳末系的最短波长是 365 nm, 由此求里德堡常量。

13.15 求出能够占据一个 d 分壳层的最大电子数, 并写出这些电子的 m_l 和 m_s 值。写出钠、钾原子中电子的排列方式。

13.16 已知在激光工作物质中未稳态寿命为 10^{-3} s, 求其能量的不确定度和发出光子频率的不确定度。

13.17 试计算处于基态的氢原子的电离能和从基态 E_1 激发到第一激发态 E_2 所必须提供的能量。

13.18 同例 13-7。设粒子处于基态 ($n=1$), $E_1 = (\pi\hbar)^2 / 2ma^2$ 。设 $t=0$ 时刻阱宽突然变为 $2a$, 粒子波函数来不及改变, 即

$$\psi(x, 0) = \psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}$$

试问: 对加宽了的无限深方势阱

$$E_p(x) = \begin{cases} 0, & |x| < a \\ \infty, & |x| \geq a \end{cases}$$

$\psi(x, 0)$ 是否还是能量本征态? 求测得粒子处于能量本征值 E_1 的概率。

第 14 章 分子与固体

物理化学已经阐明各种物体是由最小元素构成的，原子是元素的最小单元，各种元素的原子的结构与性质是有差异的，这就是说保持物质性质的最小单元是原子或分子。例如，碳、铁、铜都是元素，它们的最小单元就是碳原子、铁原子和铜原子，这几种原子有各自的结构和特性，它们可以被击破，但击破后的粒子就没有碳、铁、铜的特性了。事实上，所有物质最终都是由几种基本粒子构成的，这几种基本粒子怎样构成多种多样的、具有各种元素特性的原子，这在原子物理学中有详细的介绍。本章主要简单介绍固态物质的各种物理性质，从离子结合与离子晶体出发，给出一定的讨论。固体区别于气体和液体的特点在于，其组成粒子（可以是原子、离子、分子或它们的集团）的空间位置在没有外力作用时大多不会有宏观尺度的变化，在低温下这些组成粒子基本处于固定的位置。也正是根据组成粒子空间位置的区别，即物质结构上的差别，而将固态材料划分为晶体、准晶体和非晶体。

14.1 晶体结构

14.1.1 晶体的描述

普通物质一般总是以气态、液态和固态的形式存在，现在习惯将液态和固态统称为凝聚态。这里主要简单讨论固态物质形式及性质。长期以来，人们认为固体材料可分为三大类：晶体、准晶体和非晶体。

固体材料是由大量原子（分子或离子）组成的（以后简称为由粒子组成）。大数目的原子以一定的方式排列，称为**固体的结构**（或叫**晶体结构**）。

晶体显著的特点就是粒子排列规则，如氯化钠、金刚石、闪锌矿等一类物质，如图 14.1 所示。晶体的宏观性质包括规则的外形，一定熔点，各向异性，晶面角守恒，解理性，即具有周期性（长程有序）。一种晶体的物理性质与其组成的元素有关。还与粒子规则排列的具体形式有关，即使是同种元素构成的不同晶体，也会表现出不同的特性。例如，同为碳元素组成的石墨、碳 60 和金刚石就具有明显不同的性质；还有些晶体粒子规则排列相同，但粒子间距离不同（如 Cu 和 Ag、Ge 和 Si 等）。下面介绍晶体结构。

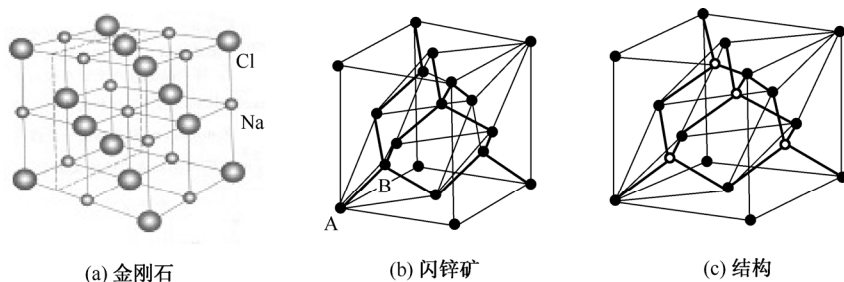


图 14.1 NaCl 晶体结构

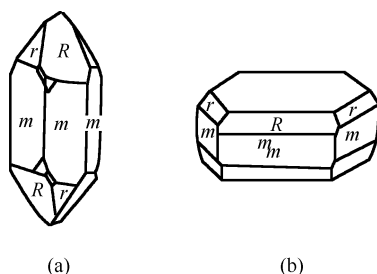


图 14.2 (a)理想石英晶体; (b)一种人造石英晶体。

由于生长条件不同,同一种晶体的外形会有很大的差异,在某条件下生长的晶面数目和在另一条件下生长的同一种晶体的晶面情况有很大的差异,如图 14.2 所示。尽管同一种晶体其外形可能不同,但相应的两晶面之间的夹角总是不变的,称这一规律为**晶面角守恒定律**。例如,石英晶体的 m - m 两面夹角为 $60^\circ 0'$, m - R 两面的夹角为 $38^\circ 13'$, m - r 的夹角也为 $38^\circ 13'$ 。

晶体具有自发地形成封闭几何多面体的特性,称为晶体的**自限性**,这一特性是晶体内部自发原子的规则排列在晶体宏观形态上的反映。

晶体结构的显著特点就是粒子排列的周期性,这种周期性的阵列称为**点阵**或**晶格**,晶格是晶体结构的数学抽象,即“点”在空间的周期性排列,其中每个“点”均是实际晶体中粒子的抽象,称为**格点**。在具体的晶体中,每个粒子都是在空间重复排列的最小单元,称为**基元**。基元中往往包含一个或几个原子、离子或分子。因此,点阵中的点即实际晶体中“基元”的抽象,如同将一个物体抽象成一个质点;而实际晶体结构与点阵和基元的关系可概括地表达为

$$\text{晶体结构} = \text{点阵} + \text{基元} \quad (14-1)$$

所谓点的周期性阵列,就是说若将晶体结构看作是在三维空间无限延伸的,那么任何一个点周围的情形都是完全相同的,这正是周期性的精髓所在。通常将这种点的周期性阵列称为**布拉维(Bravais)点阵**或**格子**,而点即为**格点**。于是,实际的晶体即可看作全同的基元安置在布拉维格点上。图 14.3 所示为二维晶格、格点、基元示意图。

在实际对晶体描述时,通常还引入原胞基矢、晶胞等概念。

由于布拉维点阵的周期性,每一个格点在空间所“拥有”的体积都一样,设这一体积为 Ω 。如果以某一格点为原点 O ,则总可以沿三个不共面的方向找到与 O 相连的格点,如图 14.4 所示。设图中 A 、 B 、 C 三点,并令沿此三个方向而长度分别为 OA 、 OB 、 OC 的

三个矢量为 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 ，这三个矢量所围成的平行六面体中不再包含其他格点，则此平行六面体的体积为

$$\Omega = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \quad (14-2)$$

这一平行六面体涉及八个格点，但每个格点同时涉及八个彼此相邻的平行六面体。

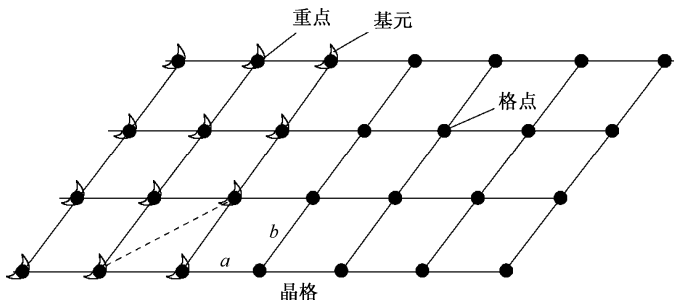


图 14.3 基元、格点、晶格

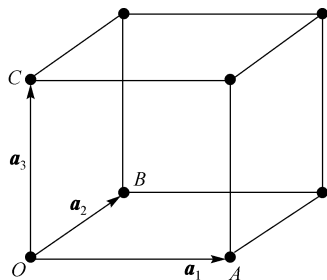


图 14.4 简单立方晶格的原胞与基矢

无疑，将此平行六面体沿 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 三个方向做周期重复必能填满全部空间而无任何缺漏。这一平行六面体称为布拉维格子的原胞，而 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 则称为原胞基矢。显然，原胞的必要条件是在其范围内只包含一个格点。对于二维原胞及其基矢选取的任意性如图 14.5 所示。

对于晶体材料除有周期性外，还有对称性。原胞能很好地描述晶体和周期性，但有时却不能兼顾结构的对称性。选取 $OAED$ 作为原胞，

基矢 $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{OA}$ 、 $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{OD}$ ，但图不能反映矩形的对称性。若选 $OAED'$ 为周期性的重复单元，就能反映矩形的对称性。这样选取的重复单元称为**晶胞**。沿晶胞边方向且长度与边长相等的矢量称为**晶胞基矢**，分别用 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 表示，基矢长度称为**晶格常数**。晶胞可以包含一个以上的格点——原胞是考虑点阵周期性的最小重复单元，而晶胞是计及周期性和对称性的尽可能小的重复单元。根据不同的对称性，有的布拉维格子的原胞与晶胞相同；有的形状有明显的差别，但后者的体积必为前者的整数倍，这一整数正是晶胞中所包含的格点数。

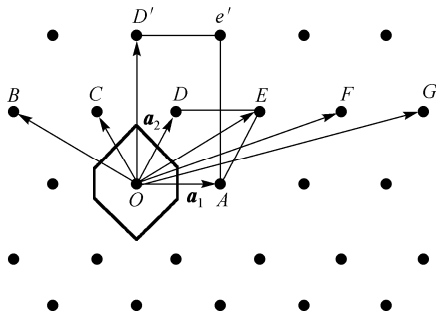


图 14.5 原胞及其基矢选取的任意性（二维）

14.1.2 典型的晶体结构

布拉维格子描述晶体结构的周期性，至于点阵的形式却并不是任意的。实际上可能存在的格子类型都受到晶体结构对称性的限制。换言之，原胞的形状或原胞基矢 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 彼此的相对取向及长度比要受到对称性的制约。以图 14.5 为例，这一结构具有对 OD' 的对

称, 因此, 如 E 处有一格点, 那么, B 处必定有一格点, 这就限制了格子的形状。考虑到晶格的对称性, 结晶学上选取的重复单元——晶胞不一定是最小重复单元, 晶胞的基矢方向便是晶体晶轴方向, 晶轴上的周期就是基矢的模, 也称晶格常数。按晶胞基矢的特征, 晶体可分为七大晶系, 包括三斜晶系、单斜晶系、正交晶系、三角晶系、四方晶系、六方晶系、立方晶系。每一具体晶系在固体物理中有专门的介绍。

七大晶系的三维布拉维点阵一共有 14 种, 一起列在图 14.6 中, 图中画出的是每一种格子的晶胞。

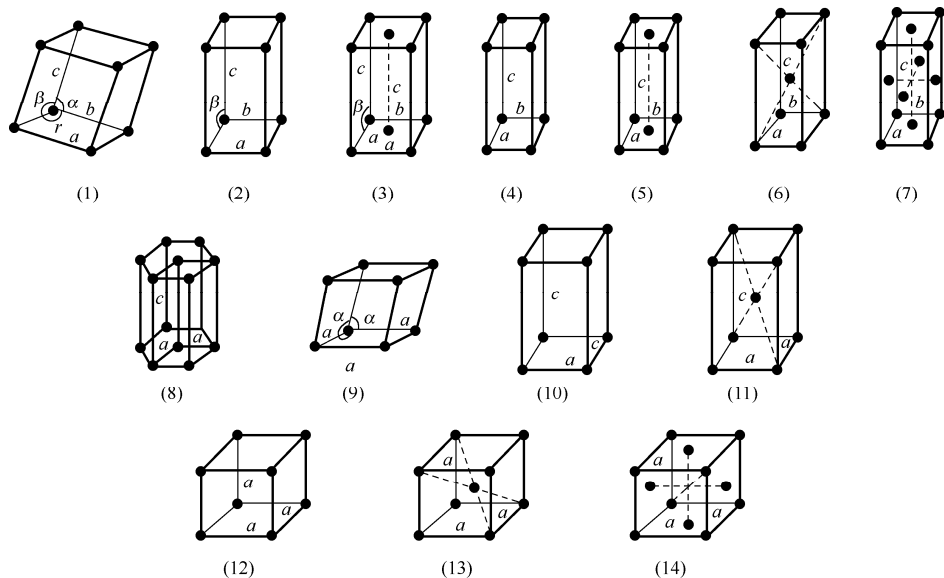


图 14.6 14 种布拉维格子

(1) 简式三斜; (2) 简式单斜; (3) 底心单斜; (4) 简式正交; (5) 底心正交; (6) 体心正交; (7) 面心正交; (8) 六角; (9) 三角; (10) 简式四角; (11) 体心四角; (12) 简立方; (13) 体心立方; (14) 面心立方

在晶体学中, 还用**晶体的配位数**来表征原子排列的紧密程度。最紧密的堆积称为密堆积, 密堆积对应最大的配位数。例如, 不论是六角还是立方密堆积, 晶体的配位数都必须是 12, 即任意一个原子球与最近邻的 12 个原子相切。又如, 一维晶格的配位数为 2, 如图 14.7 所示。



图 14.7 一维晶格的配位数

14.1.3 非晶体和准晶体

理想晶体原子排列具有周期性, 称为长程序。非晶体原子排列不具有周期性, 因此不具有长程序(如玻璃、橡胶、松香等材料), 但是非晶体材料中原子的排列也不是杂乱无章的, 仍然保留有原子排列的短程序。但短程序并不能完全地、唯一地确定非晶态材料的结构, 要确定非晶态材料的结构还须要知道原子联结中的拓扑规律。

非晶体多采用由熔态直接冷却或经蒸发、溅射及光辉放电等方法凝聚而成。对于不同非晶体有不同的结构无序表现,大致有三类:一类是组分无序,这种结构的基础仍是规则晶格,只是在格点上出现的原子种类及频率是随机的。例如,铜-锌二元固溶体合金,铜与锌离子随机地分布在一面心晶格的骨架上。当锌含量 x 在 $0 \sim 0.38$ 之间时,每个格点上锌离子占据的概率为 x ,而其铜占据的概率为 $1-x$ 。另一类非晶体是构造无序,主要是无定型金属。对晶体金属材料多半为密堆积结构,也即在固体形态中每个原子周围有尽可能多的最近邻原子的倾向(配位数趋于最大)。在无定型金属中原子仍基本上处于密堆积状态,但并不像晶体那样规则有序。第三类是无规网络,像IV族半导体 Ge、Si 或绝缘体 SiO_2 这一类原子间以共价键相结合的物质,当处于非晶态时相邻原子之间的价键仍保留几乎与晶态相同的强度,而键长与键角却在平均值附近随机涨落,从而也出现价键断开而成悬挂键的情形。整体上看原子处于一无规网络的结点之上。

还有一类晶体,它们具有长程的取向序,但是没有长程的平移对称性(周期性),这类晶体称为**准晶体**。例如,目前用急冷方法制备的 AlMn 合金是具有正二十面体取向序的准晶体,且由计算得到的衍射斑点的位置还是强度都与实验(如利用 X 射线方法)得到的结果符合得很好。

目前发现的准晶体材料多为多属间化合物,这些物质不仅结构迥异,而且具有独特的性质。虽为合金却具有近于绝缘体的电学与热学性质,不仅机械强度高,化学性质也很稳定而不易发生反应,并且有低摩擦与弱黏性,因此,目前科技界普遍看好准晶体的潜在应用前景。

对非晶体、准晶体的进一步研究已超出了本书的范围,读者可阅读相关固体物理专著。

例 14-1 定义:原子堆积模型中,原子球体积与晶体体积之比为致密度。若晶体中最小重复单元为晶胞,则致密度定义为

$$\eta = \frac{\text{晶胞中原子体积}}{\text{晶体体积}}$$

试由此式计算简立方晶体的致密度。简立方晶体模型如图 14.8 所示。

解 设晶胞边长为 a ,则 $V = a^3$; 原子半径 $r = \frac{a}{2}$,则原子球的体积为 $\frac{4}{3}\pi r^3$; 一个晶胞内原子球的个数为 $\frac{1}{8} \times 8 = 1$,所以,晶胞内原子球的体积为

$$v_e = 1 \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

由致密度公式得

$$\eta = \frac{\text{晶胞中原子体积}}{\text{晶体体积}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^3}{a^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0.52$$

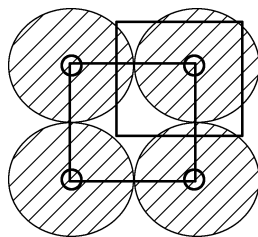


图 14.8 例 14-1 图

14.2 离子结合与离子晶体

14.2.1 原子的电离能、亲和能及电负性

在具体讨论离子结合机理之前,先讨论不同原子对价电子的吸引力的强弱,通常用电离能、亲和能及电负性三个物理量来描述这种性质。

使一个价电子摆脱原子 A 的束缚,必须对它施加一定的能量,这个能量叫**电离能**,用 W_i 表示,其关系可表示为

$$A + W_i \rightarrow A^+ + (-e) \quad (14-3)$$

一个中性原子从外界获得一个电子而转变成负离子时可以释放出一定的能量,这个能量叫**亲和能**,用 W_a 表示,其关系可表示为

$$A + (-e) \rightarrow A^- + W_a \quad (14-4)$$

从上述可知,电离能及亲和能都在一定程度上反映了原子对价电子的束缚能力。原子对价电子的束缚能力越强,则该原子的电离能和亲和能就越大。为了从总体上描述这种属性,引入**电负性**概念。马利肯(Mulliken)把电负性定义为

$$\chi = \frac{1}{6.3}(W_i + W_a) \quad (14-5)$$

这里取系数 1/6.3 主要是为了使 Li 原子的电负性 $\chi_{Li} \approx 1$ 。

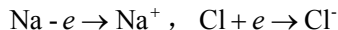
除马利肯(Mulliken)外,泡令(L.Pauling)以及其他人都对电负性给出了各自的定义。尽管在数值上每一种电负性有些差别,但是 χ 随原子的定性变化趋势是相同的。表 14-1 给出了部分元素的电离、亲和能及电负性。

表 14-1 部分元素的电离能、亲和能及电负性

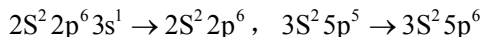
周期	族	I A	II A	IIIB	IVB	VB	VIB	VII B
2	元素	Li	Be	B	C	N	O	F
	电离能 (eV)	5.40	8.32	8.28	11.27	15.55	13.62	17.43
	亲和能 (eV)	0.5/0.62	-0.6	0.1	1.2/1.27	-0.6	2.3/1.46	3.9/3.4
	电负性	1	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4
3	元素	Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl
	电离能 (eV)	5.14	7.64	5.97	8.15	10.9	10.36	12.90
	亲和能 (eV)	0.0/0.55	-0.9	0.2/0.46	0.6/1.39	0.3/0.74	2.5/2.08	3.7/3.61
	电负性	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.5	3.0
4	元素	K	Ca	Ga	Ce	As	Se	Br
	电离能 (eV)	4.34	6.11	5.97	8.31	10.5	9.73	11.76
	亲和能 (eV)	/	/	/	/	/	/	3.5/3.36
	电负性	0.8	1.0	1.5	1.8	2.0	2.4	2.8

14.2.2 离子的形成与结合

下面先通过由中性原子形成离子对（键）的过程来加以讨论，例如，中性原子 Na、Cl:



即 Na 原子失去一个电子形成 Na^+ 离子，Cl 原子得到一个电子形成 Cl^- 离子，它们的电子态变化为



从能量的角度来看，若把 I 族的 Na 原子与 VII 族的 Cl 原子放在一起。它们的电负性相差很大，为 $\chi^{\text{Cl}} - \chi^{\text{Na}} = 3.0 - 0.9 = 2.1$ 。Na 原子对电子的束缚力很弱，而 Cl 原子对电子有很强的束缚力。当它们靠得很近时，Na 原子中的电子就会转移到 Cl 原子上去，使它们变成 Na^+ 及 Cl^- 。根据式 (14-1) 和式 (14-2)，对于 Na 原子及 Cl 原子组成的系统可得

$$\text{Na} + \text{Cl} + (W_{\text{i}}^{\text{Na}} - W_{\text{a}}^{\text{Cl}}) \rightarrow \text{Na}^+ + \text{Cl}^- \quad (14-6)$$

这就是说，在由中性原子 Na 和 Cl 转变成正、负离子 Na^+ 、 Cl^- 的过程中，还必须加入能量 $(W_{\text{i}}^{\text{Na}} - W_{\text{a}}^{\text{Cl}}) = 5.14 - 3.7 = 1.44 \text{ eV}$ 。乍看起来这个过程是不可能实现的，但是这里没有考虑到正、负离子间的吸引能及排斥能。当正、负离子间距为平衡值 r_0 时，吸引能 $U_{\text{吸引}}(r_0) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$ 与排斥能 $U_{\text{排斥}}(r_0)$ 之和达到极小值。故当它们组成相互间距为 r_0 的离子对时，可释放出能量 $|U_{\text{吸引}}(r_0)| - U_{\text{排斥}}(r_0)$ 。也即

$$\text{Na}^+ + \text{Cl}^- \rightarrow \text{Na}^+ \text{Cl}^- + |U_{\text{吸引}}(r_0)| - U_{\text{排斥}}(r_0) \quad (14-7)$$

这样式 (14-4) 就应写成

$$\text{Na} + \text{Cl} \rightarrow \text{Na}^+ \text{Cl}^- + |U_{\text{吸引}}(r_0)| - U_{\text{排斥}}(r_0) - (W_{\text{i}}^{\text{Na}} - W_{\text{a}}^{\text{Cl}}) \quad (14-8)$$

上式表明，当一对中性的原子 Na 和 Cl 转变成离子对 $\text{Na}^+ \text{Cl}^-$ 时，可以释放出能量

$$U_{\text{解离}} = |U_{\text{吸引}}(r_0)| - U_{\text{排斥}}(r_0) - (W_{\text{i}}^{\text{Na}} - W_{\text{a}}^{\text{Cl}}) \quad (14-9)$$

或者说离子对 $\text{Na}^+ \text{Cl}^-$ 的内能比中性原子对 Na、Cl 低 $U_{\text{解离}}$ 。如果以无相互作用的两个孤立中性原子对的内能作为能量的零点，则 $\text{Na}^+ \text{Cl}^-$ 离子对的内能即为 $-U_{\text{解离}}$ 。常把 $U_{\text{解离}}$ 称之为离子对的解离能。对于 $\text{Na}^+ \text{Cl}^-$ ，如果取 $r_0 = 0.25 \text{ nm}$ ，可计算得 $|U_{\text{吸引}}(r_0)| = 5.7 \text{ eV}$ 和 $U_{\text{排斥}}(r_0) = 0.2 \text{ eV}$ 。因此， $\text{Na}^+ \text{Cl}^-$ 离子对的解离能 $U_{\text{吸引}}(r_0) - U_{\text{排斥}}(r_0) - (W_{\text{i}}^{\text{Na}} - W_{\text{a}}^{\text{Cl}}) = (5.7 - 0.2 - 1.44) = 4.06 \text{ eV}$ 。所以， $\text{Na}^+ \text{Cl}^-$ 离子对的形成是稳定的，大量的离子对能够形成离子晶体。

须要说明的是，由中性原子形成离子键时，元素的电负性差是很重要的，一般来说，当电负性差 $\Delta\chi > 1.7$ 时发生电子转移，形成离子键；而当电负性差 $\Delta\chi < 1.7$ 时，不发生电

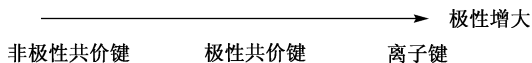


图 14.9 离子键和共价键

子转移,此时形成**共价键**。但离子键和共价键之间,并非是严格区分的。通常可将离子键视为极性共价键的一个极端,而另一极端

为非极性共价键,如图 14.9 所示。化合物中不存在百分之百的离子键,即使是在 NaF 的化学键之中,也有共价键的成分,即除离子间靠静电相互吸引外,尚有共用电子对的作用。

下面讨论离子晶体的内聚能及正负离子对的稳定结构问题。

14.2.3 离子晶体的内聚能

当 N 个 A^+ 正离子与 N 个 B^- 负离子结合成离子晶体时,每个离子不仅与邻近的异号离子相互作用,也与次近邻的同号离子相互作用,这种相互作用能叫做**库仑势**,可表示为

$$U_{\text{库仑}} = -n_1 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + n_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_2 r} - n_3 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_3 r} + \dots \quad (14-10)$$

这里 n_1, n_2, n_3, \dots 表示最近邻、次近邻及再次近邻……的离子数。因为最近邻为异号离子,故第一项为负,第二项为正,第三项也为负…… r 为正、负离子间的最近邻距离,而 $a_2 r$ 及 $a_3 r$ 分别表示次近邻及再次近邻离子间的距离。式(14-10)也可以写成

$$U_{\text{库仑}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \left[n_1 - \frac{n_2}{a_2} + \frac{n_3}{a_3} - \frac{n_4}{a_4} \dots \right] = -M \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (14-11)$$

其中,

$$M = n_1 - \frac{n_2}{a_2} + \frac{n_3}{a_3} - \frac{n_4}{a_4} + \dots \quad (14-12)$$

M 与具体的晶体结构有关,称为**马德隆**(Madelung)常数。对于氯化钠结构,可算得

$$M = 6 - \frac{12}{\sqrt{12}} + \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{6}{\sqrt{4}} + \frac{24}{\sqrt{5}} - \dots = 1.748$$

同样对于氯化铯结构及闪锌矿结构可分别计算得 $M = 1.763$ 及 $M = 1.638$ 。

式(14-11)是每个离子对其他离子的库仑相互作用。现在假设有 N 对离子,因此共有 $2N$ 个离子,而在计算各个离子间的互作用时,都重复计算了一次,因此应乘以 $1/2$ 。这样,由 N 对离子构成的离子晶体,离子间的总库仑吸引能就为

$$U_{\text{吸引}} = NU_{\text{库仑}} = -NM \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (14-13)$$

我们知道,当离子间相距较近,离子的电子壳层相互交叠时,由泡利不相容原理引起排斥能

$$U_{\text{排斥}} = \frac{b}{r^n} \quad (14-14)$$

这样可得离子晶体的内能与 N 个孤立的正、负离子系统的内能差（吸引和排斥作用对晶体内能的贡献）为

$$U(r) - U_{\text{离子}} = U_{\text{吸引}} + U_{\text{排斥}} = -NM \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{b}{r^n} \quad (14-15)$$

如果把能量的零点取在孤立的正、负离子系统上，即取孤立的正、负离子系统的内能 $U_{\text{离子}} = 0$ ，则离子晶体的内能为

$$U(r) = -NM \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{b}{r^n} \quad (14-16)$$

在上式中令 $A = NM \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ ，并认为 $-NM \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ 中 r 的指数为 m ($=1$)，从 $U(r)$ 曲线可见在 r_0

处存在一个极小值，其值由 $U(r)$ 的一阶导数 $\left. \frac{dU(r)}{dr} \right|_{r=r_0} = 0$ 决定，由此可得

$$r_0 = \sqrt[n-m]{\frac{bn}{Am}} \quad (14-17)$$

原子间相互作用力 F 与 $-\frac{dU(r)}{dr}$ 成正比，相应于 $U(r)$ 的极小位置 $r = r_0$ 处， $F = 0$ ，相应于吸引力与排斥力相平衡的位置。在 $r = r_0$ 处，晶体的内能具有最小值 U_c ，其值为负。这就是说，与分离成各个孤立原子的情况相比，各个原子聚合起来形成晶体后，系统的能量将下降 $|U_c|$ ，常把 $|U_c|$ 称为晶体的**内聚能**。正因如此，由各个原子聚合在一起形成的晶体是稳定的。 $|U_c|$ 越大，相应的晶体也越稳定。

于是根据式 (14-16)、式 (14-17) 可求出平衡时离子晶体的内能为

$$U_c(r_0) = -\frac{A}{r_0^m} \left(1 - \frac{m}{n}\right) = NM \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (14-18)$$

式中 r_0 是离子晶体中正、负离子间的平衡间距。上式表示：以孤立的正、负离子系统的内能 $U_{\text{离子}}$ 作为能量零点，而计算得到的离子晶体的内聚能。

这里同时指出，由原子的离子形成固体时，它们靠静电吸引，形成化学键体系的势能与核间距之间的关系如图 14.10 所示。当两个原子的核间距离 r 为无穷大时，势能为零；当 $r > r_0$ ， r 减小时，

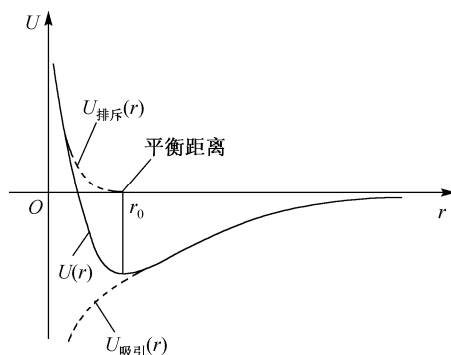


图 14.10 U 随 r 的变化——晶体和内能

正、负离子有相互吸引作用, 势能 U 减小, 体系较稳定; 当 $r=r_0$ 时, 势能 U 有极小值, 此时体系最稳定, 表明这时形成**离子键态**; 当 $r<r_0$ 时, 势能 U 急剧上升。以Na和Cl为例, 因为 Na^+ 和 Cl^- 相互接近时, 它们之间的电子斥力急剧增加, 从而导致势能骤然上升。因此, 离子相互吸引, 保持一定距离(离子键态)时, 体系最稳定。

14.3 共价结合与共价晶体

14.3.1 氢分子中的共价键

共价结合是靠两个原子各贡献一个电子, 形成的共价键结合的分子。氢分子是靠共价键结合的典型例子。实际上, 共价键的现代理论正是从氢分子的量子理论开始的, 当两个氢原子相距很远时, 它们的电子都有相同的能量, 处在相同的1s轨道上。当两个氢原子相互靠近结合形成氢分子时, 两个1s轨道发生交叠, 这时每个电子都受到两个核的作用, 成为氢分子中的电子, 两个电子可以形成所谓的**成键态**(用符号“ $\uparrow\downarrow$ ”表示)和**反键态**(用符号“ $\uparrow\uparrow$ ”表示)。此时, 电子不再是氢原子的1s能级, 而是处于氢分子的某个能级。根据量子理论, 这时对应的波函数由两个原子之前的1s能级波函数组合而成并有两个能级。成键态能级低于1s能级, 反键态能级高于1s能级, 如图14.11(a)所示。

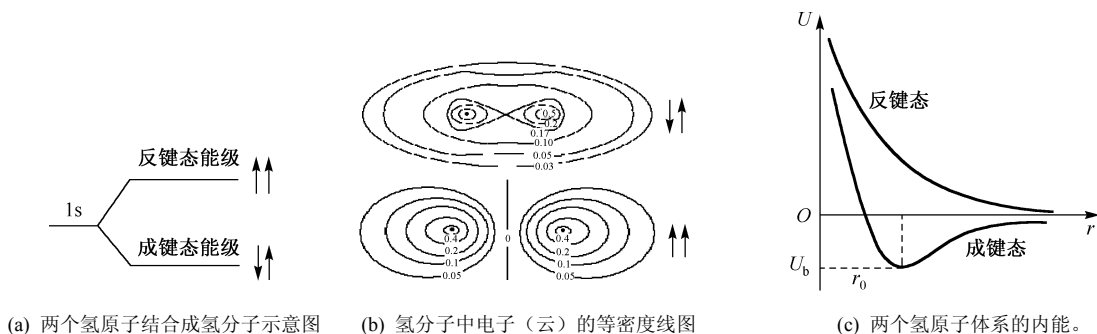


图 14.11 两个氢原子结合成氢分子示意图

氢分子的两个电子处于不同状态时, 体系的电子的分布及总能量是不同的。如图14.11(b)所示, 成键态电子(云)密集在二个原子核之间, 而反键态两个原子核之间的电子(云)密度减小。在能量分布上, 这两个电子的能级区别在于电子的自旋状态不同, 对于成键态, 两个电子的自旋相反, 电子(云)密集在两个原子核之间, 同时受到两个原子核的库仑吸引作用, 使得成键态能量相对于原子能级降低了; 而对于反键态, 两个电子的自旋方向相同, 这时能量升高。实际氢分子的两电子是处于成键态能级上的, 使体系总能量降低, 所以成为稳定的氢分子。氢原子体系的内能在两种情况下的分布, 如图14.11(c)所示, 具体知识在后面固体能带一节中介绍。

由于成键态上可以填充正、反自旋的两个电子，使体系能量下降，这意味着它们有着相互吸引的作用。这样一对为两个原子共有的自旋相反配对的电子结构称为**共价键**。

14.3.2 共价结合的饱和性和方向性

下面我们讨论对于一个原子在什么情况下能形成共价键，以及原子依靠共价键能和其他原子结合的数目。共价键只能由未配对的电子形成，例如，以氢原子和氮原子的对比来看，氢原子在 $1s$ 轨道上只有一个电子，自旋可以取任意方向，这样的电子称为未配对电子，而在氮原子中， $1s$ 轨道上有两个电子，根据泡利原理，它们必须具有相反的自旋，这样自旋已经“配对”的电子便不能形成共价键。根据这个原则，价电子壳层如果不到半满，所有的电子都可以是不配对的，因此，能形成共价键的数目与价电子数相等；当价电子壳层超过半满时，由于泡利原理，部分电子必须自旋相反配对，所以能形成的共价键数目少于价电子的数目。再看氮原子的情况，氮原子共有 7 个电子，它们分别处于 $1s^2$ 、 $2s^2$ 、 $2p^3$ 。主量子数 $n=1$ 的 $1s$ 壳层只能容纳两个电子，因此该壳层已满。对于 $n=2$ 的壳层，共可容纳 8 个电子，但现在只有 5 个电子，如图 14.12(a) 所示。尚有三个电子自旋未配对轨道为 p_x 、 p_y 、 p_z 。它们可与其他三个原子形成共价键。这就是说在氮原子之间可以形成三个共价键。这三个未配对电子 p_x 、 p_y 、 p_z 的轨道如图 14.12(b) 所示，当两个氮原子沿 z 轴方向相互靠近时，两个 p_z 电子相互交叠，交叠后的电子对称地分布在两个氮原子能的连线周围，这样形成的共价键常称为 σ 键。两个 p_x 轨道交叠后的电子对称地分布在通过两个原子连线的平面 (yz 平面) 两侧，这样的共价键常称为 π 键，其他两个 p_y 电子同样形成一个 π 键 (图中未画出)，所以在两个原子间形成三个共价键。

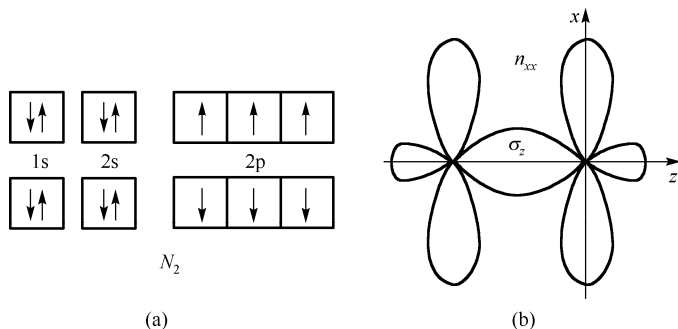


图 14.12 氮分子中的共价键

事实上，IV族到VII族的元素依靠共价键结合，共价键的数目符合所谓 $8-N$ 定则， N 指价电子数目。这一关于共价键的性质称为共价键的**饱和性**。这是由一个 ns 轨道和 3 个 np 轨道组成的，考虑到两种自旋，共包含 8 个量子态，价电子壳层为半满或超过半满时，未配对的电子数实际上取决于未填充的量子态，因此等于 $8-N$ 。

共键价键还有一特征,就是指在特定方向上形成共价键,叫做共价键的**方向性**。由共价键的量子理论,共价键的强弱决定于形成共价键的两个电子轨道相互交叠的程度。现以甲烷 CH_4 为例来说明,氢原子只有一个未配对的 $1s$ 电子,与其他原子可以形成一个共价键,

碳原子共有6个电子,电子态为 $\overset{1s^2}{\uparrow\downarrow}\overset{2s^2}{\uparrow\downarrow}\overset{2p^2}{\uparrow\uparrow}$,其中2个电子占据 $1s$ 轨道,形成闭合的 $1s$ 壳

层,其余4个电子是价电子,两个占据 $2s^2$ 轨道,按照泡利原理它们自旋相反,因此也已配对,这样看似似乎最多只能与两个氢原子相结合而形成 CH_2 ,但实际情况是碳原子与氢结合而形成 CH_4 。其原因是在结合过程中,碳原子中的一个 $2s$ 电子常被激发到 $2p$ 轨道,形

成 $\overset{1s^2}{\uparrow\downarrow}\overset{2s}{\uparrow}\overset{2p^3}{\uparrow\uparrow\uparrow}$ 的结构。这样,四个价电子全变成未配对的电子,一个碳原子便可形成四个

价电子了。 $2s$ 电子被激发到 $2p$ 轨道是需要能量的,但激发碳原子可以形成更多的价键,与更多的其他原子相结合,在结合时所降低的能量完全可以抵偿把 $2s$ 电子被激发到 $2p$ 轨道所需要的能量。故碳原子的四个未配对电子分别处于 $2s$ 、 $2p_x$ 、 $2p_y$ 、 $2p_z$ 。因为 $2p_x$ 、 $2p_y$ 、 $2p_z$ 轨道呈相互垂直的哑铃状,而氢原子的 $1s$ 轨道呈球状。故三个未配对电子与氢的 $1s$ 电子形成的价键盘应相互垂直,而余下的 $2s$ 电子与氢的 $1s$ 电子所形成价键可以在任何方向。但实验测量结果是:四个氢分别处在四面体的顶角位置,而碳处在四面体的中心,四个价键是对称分布的,键长缩短,四个键能量相同。为了解释这一实验结果,理论上认为在形成共价键时,四个未成对电子 $2s$ 、 $2p_x$ 、 $2p_y$ 、 $2p_z$ 轨道相互混合,重新组合成四个新的未配对的电子组态,叫做 sp^3 杂化轨道。

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1}{2}(2s + 2p_x + 2p_y + 2p_z) \\ \psi_2 &= \frac{1}{2}(2s - 2p_x - 2p_y + 2p_z) \\ \psi_3 &= \frac{1}{2}(2s - 2p_x + 2p_y - 2p_z) \\ \psi_4 &= \frac{1}{2}(2s + 2p_x - 2p_y - 2p_z)\end{aligned}\tag{14-19}$$

这四个杂化轨道分别沿四面体的四个对称方向。这样,四个对称的杂化轨道与氢原子的 $1s$ 轨道结合时,相互间可以有最多交叠,形成四个稳定的 σ 键。这些杂化轨道所形成的共价键都具有方向性,这就是前面说的共键价的另一特征,即共价键的方向性。

注意,电子处在杂化轨道上,能量比碳原子基态提高了,也就是说杂化轨道需要一定的能量。但是经过杂化以后,成键的数目增多了,而且由于电子更密集在四面体的顶角方向上,使得成键能力更强了,形成共价键时能量的下降完全可以补偿轨道杂化的能量。

14.3.3 共价晶体的结构

共价键的饱和性及方向性造就了原子形成共价晶体所具有的特定结构。共价键的饱和性决定了共价晶体的配位数，它只能等于原子的共价键数，或等于原子的价电子数 N (当 $N < 4$) 或 $8 - N$ (当 $N > 4$)。而具体的晶体结构又取决于共价键的方向性。

最典型的例子是 IV 族元素 C、Si、Ge 所形成的共价晶体结构。根据共价键的饱和性，它们都有 4 个价电子，因此可以形成四个共价键，这就是说它的配位数是 4，而根据方向性，这 4 个未配对电子轨道通常都发生 sp^3 杂化，而形成四面体键。而四面体键所形成的共价晶体为金刚石结构，如图 14.13 所示。

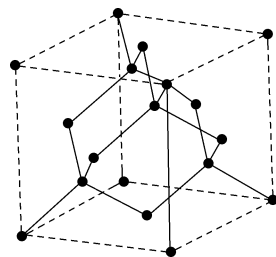


图 14.13 金刚石晶体结构的典型单元

14.3.4 共价晶体的内聚能

对于离子晶体的内聚能通常用式 (14-14) 计算，但对于共价晶体的结合能的计算远比离子晶体复杂，近年来对共价晶体采用量子力学方法（或具体说是由 Hobenberg, Kohn 和 Shan 等发展了局域密度泛理论），在这个理论基础上对各类半导体金属材料的内聚能、晶体常数、体变模量^①做了计算，与实验结果符合得相当好，成为近年来电子理论中的一项重要成果。表 14-2 中列出了共价晶体内聚能的计算结果与实验的比较。

表 14-2 共价晶体 C、Si、Ge 的内聚能、晶格常数及体积弹性模量与实验的比较

		晶体常数 (nm)	内聚能 (eV/原子)	体变模量 (10^{11} Pa)
C	计算值	3.602	7.58	4.33
	实验值	3.567	7.37	4.43
	%误差	1	3	-2
Si	计算值	5.451	4.67	0.98
	实验值	5.429	4.63	0.99
	%误差	0.4	1	-1
Ge	计算值	5.655	4.02	0.73
	实验值	5.652	3.85	0.77
	%误差	0.2	4	-5

例 14-2 已知金属钠的重量密度为 $9.71 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ，且每个钠原子只有一个价电子。求①载流子浓度；②费米能及费米速度。

分析 由题意，钠原子数与自由电子数相等。因此，只要先计算出钠原子的质量，就

① 体变模量，根据热力学理论，晶体体变弹性模量定义为 $B_m = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T$ ，这里 V 为晶体体积， P 为压力。

可以由已知的金属钠的质量密度求得自由电子浓度(即载流子浓度),有了载流子浓度 n ,就可进一步计算出费米能和费米速度。

解 ① 已知 $\rho = 9.71 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 原子质量 $m_{\text{Na}} = \frac{m_{\text{mol}}}{N_{\text{A}}} = \frac{2.3 \times 10^{-2} \text{ kg}}{6.02 \times 10^{23}} = 3.82 \times 10^{-26} \text{ kg}$,

所以有

$$n = \frac{\rho}{m_{\text{Na}}} = 2.54 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

② 费米能和费米速度分别为

$$E_F = \frac{3^{2/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{2m_e} n^{2/3} = 5.05 \times 10^{-19} \text{ J} = 3.15 \text{ eV}$$

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m_e}} = 1.05 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

14.4 金属结合与金属晶体

金属性结合的基本特点是电子的“共有化”,即在结合成晶体时,原来属于各原子的价电子不再束缚在原子上,而转变为在整个晶体内运动。原子在失去价电子后的正离子就浸在这些自由电子的电子云之中。通过带负电的电子云与正离子间的库仑引力把各个正离子结合在一起成为金属晶体。

晶体的平衡是依靠一定的排斥作用与上面提及的库仑吸引作用相抵,排斥作用来源于两情形,当体积缩小,共有化电子密度增加的同时,它们的动能将增加,应用一定的统计方法可以计算动能正比于(电子云密度) $^{2/3}$;另外,当原子实相互接近到它们电子云发生显著重叠时,也就和在离子晶体中一样,产生强烈的排斥作用。

由于金属晶体内存在有大量的自由电子,因而金属晶体具有良好的导电性、导热性和金属光泽,这些性质都是和共有化电子在金属内自由运动相联系的。

金属结合与离子结合、共价结合对比还有一个重要特点,就是对晶格中原子排列的具体形式没有特殊要求。例如,金属结合首先是一种体积效应,原子越紧凑,库仑能就越低。故金属结合常形成排列最紧密的面心结构及六角密积结构,配位数均为12。也有某些金属形成配位数稍低的体心立方结构(配位数为8)。

金属的一个很重要的特点是一般都具有很大的**范性**,可以经受相当大的范性形变,这是金属广泛用做机械材料的一个重要原因。金属的范性的本质是与晶体内部形成原子排列上的不规则性相联系的。应用局域密度泛理论对金属晶体的晶格常数、内聚能和体变模量计算,所得结果与实验结果相当一致。这里就不专门列出了。

14.5 能带、导体和绝缘体

14.5.1 固体的能带结构

(1) 电子的共有化

前面提到共价结合是靠两个原子各贡献一个电子，形成所谓的共价键。氢分子是靠共价结合的典型例子。就一般而言，一个价电子原子可以看成由一个电子和一个正离子组成，电子在正离子的场中运动。根据量子理论，当这样系统的原子结合在一起时，可以形成所谓成键态和反键态。设想有原子 A 和原子 B，它们表示互为近邻的一对原子，当它们是自由原子时，它们各有一个价电子，这时势能曲线为图 14.14(a)所示，当两个原子很近时，它们的势能曲线为图 14.14(b)实线所示。对于由大量原子作周期性有规则排列成晶体时，晶体形成了如图 14.14(c)的周期性势场。

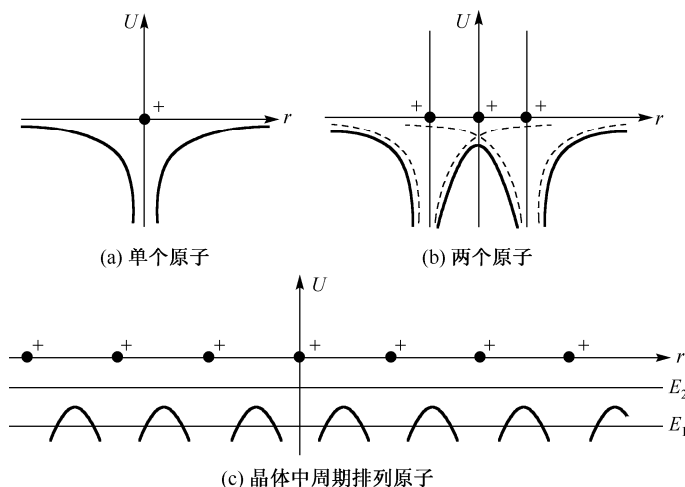


图 14.14 原子晶体中的势场

为了确定电子在晶体周期性势场中运动，运用量子力学中归一化波函数 ϕ_A 、 ϕ_B 求解，这是一个较为复杂的问题。当两个原子较近时，波函数交叠，形成共价键，这时每个电子均为 A、B 原子共有。当 A、B 两原子是同一种原子时，两原子自由能级 $\varepsilon_A = \varepsilon_B = \varepsilon_0$ 。但由于它们相互接近，这时描述电子轨道的波函数就为

$$\begin{aligned}\psi_+ &= C_+(\phi_A + \phi_B) \\ \psi_- &= C_-(\phi_A - \phi_B)\end{aligned}\quad (14-20)$$

式中 C_+ 、 C_- 为归一化常数，通常称 ψ_+ 、 ψ_- 为成键态和反键态波函数，成键态能量低于原

子能级 ε_0 ，反键态的能量高于原子能级 ε_0 。亦即此时原子的各个子能级不再具有原先的单一值，而使两个原子的能量状态具有稍为不同的能量，使原先的能级分裂成两个相距很近的子能级。

在图 14.14(c)中，对于能量为 E_1 的电子来说，势能曲线代表着势垒，当电子能量低于 E_1 时，电子将不能越过最大势能（势垒），这时可认为电子束缚在各自的离子周围。对于具有较大能量（如大于 E_2 ）的电子，当电子能量超过势垒高度，这时就可以在晶体中自由运动。还有一部分电子略大于 E_1 ，虽然不能越过势垒，但却可以通过**隧道效应**而进入相邻的原子中去。这样，电子不在束缚于个别的原子，而是在整个晶体内运动，亦即由于晶体中原子的周期性排列而使价电子不再为单个原子所有的现象，称为电子的共有化。在晶体内出现的一批属于整个晶体原子所共有的电子，称为共有化电子。

(2) 能带的概念

在周期性结构晶体中，A、B 两原子间的距离很小时，原子 A 上的电子除受到自身原子核作用外，还受到另一个靠得很近的原子 B 的作用；原子 B 也如此。原子间相互作用的结果使得原子的各个子能级不再具有原来的单一值，而使两个原子的能量状态具有稍为不同的能量，例如，两个氢原子在孤立时，它们的核外电子处于基态（1s 态）。当它们相互靠近形成一个氢分子时，由于电子的共有化，氢分子原先的能量 E 分裂为两个相距很近的子能级，如图 14.15(a)所示。图 14.15(b)所示为晶体中 6 个彼此靠得很近的原子的 1s 态和 2s 态电子的能级分裂。

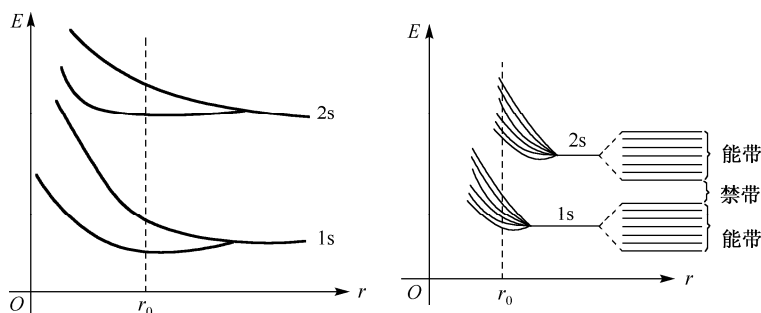


图 14.15 晶体中的能级分裂

在理想的周期性结构晶体中，原子间的间距很小。设晶体由数量巨大的 N 个原子构成，它们的外层电子被共有化，使原来处于相同能级上的电子不再具有相同的能量，而处于 N 个互相靠得很近的子能级上，由于晶体中原子数目非常大，这些子能级几乎靠在一起连成一片（换句话说，在 N 个互相靠得很近的子能级上，相邻两能级间的能量差很小），形成所谓的**能带**。

对于一定的晶体，不同壳层的电子能级分裂所形成的能级宽度各不相同，内层电子共

有化程度不显著，能带很窄，而外层电子共有化程度显著，能带较宽。能带的符号仍沿用子能级的符号，如 1s 带、2s 带、2p 带、3s 带、3p 带……

(3) 满带、导带、带隙

晶体中电子在各能带上的分布仍然遵从泡利原理和能量最小原理，能级数取决于组成晶体的原子数。例如，有 N 个原子，则 1s、2s 等 s 轨道上可填充 $2N$ 个电子，2p、3p 等 p 轨道上可填充 $6N$ 个电子等。晶体中，电子按照能量从低到高的顺序来填充，每个能级可填入自旋相反的两个电子，如果一个能带中的各个能级都被电子填满，这样的能带称为**满带**。晶体在外电场中，满带的电子不能起导电作用。

由价电子能级分裂后形成的能带称为**价带**。若价带中的能级没有全部被电子填满，在外电场作用下，电子可进入能带中未被填充的高能级，且没有反向电子的转移与之抵消，因而形成电流，故这样的能带又称为**导带**。

还有一种能带，其中所有的能级都没有被电子填入，这样的能带叫空带。与各原子的激发态能级相对应的能带，在未被激发的正常情况下就是空带。如果由于某种原因（如热激发、光激发等），价带中仍有些电子被激发而进入空带，则在外电场作用下，这种电子可以在该空带内向较高的能级跃迁，一般地没有反向电子的转移与之相消，也可形成电流，表现出一定的导电性，因此空带也是导带。

各能带之间的间隔称为**禁带**，禁带的宽度称为**带隙**，带隙的宽度对晶体的导电性起着重要的作用，有的晶体两个相邻能带可能重合，这时带隙消失。

上述介绍的晶体的能带结构，如图 14.16 所示。

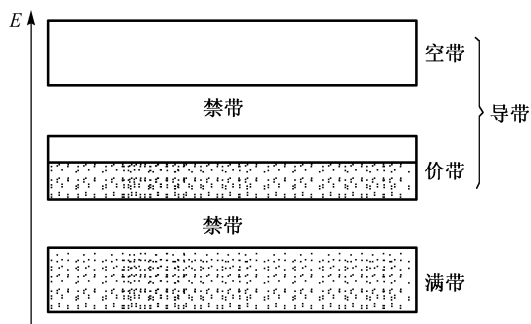


图 14.16 晶体的能带结构图

14.5.2 导体、半导体和绝缘体

导体、半导体和绝缘体这三类材料各自都有较独特的电、磁及其他各类属性，因而这些材料都广泛地应用于科学技术并进入大众的日常生活之中。通常人们将电阻率为 $10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ 以下的材料，称为**导体**；电阻率为 $10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ 以上的物体称为**绝缘体**，而将电阻率介于导体与绝缘体之间的一类材料称为**半导体**。半导体又分为本征半导体和杂质半导体，所谓本征半导体就是指一类**纯净的无杂质的半导体**。从能带结构来看，本征半导体类似于绝缘体，价带为满带，只是价带与导带之间的禁带宽度较绝缘体小。IV族元素锗、硅及III-V族元素是最常见的典型半导体材料。表 14-3 列出了典型半导体的禁带宽度。本征半导体的导电特性是由于满带中的价电子在热激发或光激发的作用下，由满带跃迁到导带

而形成的。这时在导带中出现了电子，而原来充满了价电子的满带，则出现了空状态，这种满带中的空状态，叫做**空穴**，空穴等同于一个带 $+e$ 的电荷。

表 14-3 典型半导体的禁带宽度

	Si	Ge	GaAs
300K $E_g(\text{eV})$	1.09	0.66	1.42

在半导体中掺入杂质可显著地改变半导体的特性。以硅和锗为例，如在其中掺入百万分之一量级的III族或V族元素，可使其室温电导率增加五、六个数量级。

杂质半导体又分为空穴型(p型)半导体和电子型(n型)半导体。下面将简略介绍。

将五价原子(如磷P、砷As)或三价原子(如硼B、铝Al)掺入到四价元素(Si)中，如图14.17(a)、(b)所示，以磷、硼原子替代硅原子的形式存在，故称之为**替位式掺杂**。图14.17(b)为掺磷(P)示意图，硅晶体中每个原子有四个最近邻原子，四个价电子与四个近邻原子形成共用电子对的共价键，于是构成最外层具有八个电子的稳定结构。磷(P)替位后，由于磷有五个价电子，其中四个价电子与相邻硅原子形成共价键，第五个价电子所受的束缚较小，它可环绕带正电的离子磷(P^+)运动。这个电子在 P^+ 的电场中的电离能约为 0.045 eV 。它比硅的禁带宽度($E_g=1.09\text{ eV}$)要小很多。亦即只须远小于禁带宽度的能量就能使这一电子脱离 P^+ 的束缚而在晶体中自由运动。与此同时，磷原子被电离成一价正离子。这时，在半导体的价带和导带之间，产生了一个距导带很近的附加能级，这个能级叫**施主能级**。而磷(及其他V族元素)为**施主型杂质**。因为施主能级很靠近导带底，导带底与施主能级间的能量差称为**施主电离能**，通过实验可知，V族元素在硅中的施主电离能在 $0.045\sim 0.039\text{ eV}$ ，即施主电离能远小于禁带宽度，所以施主能级上的电子很容易受激发而跃迁到导带上去，参与导电。由于含有施主杂质半导体的载流子为电子，通常就将掺有施主杂质的半导体称为**n型半导体**。

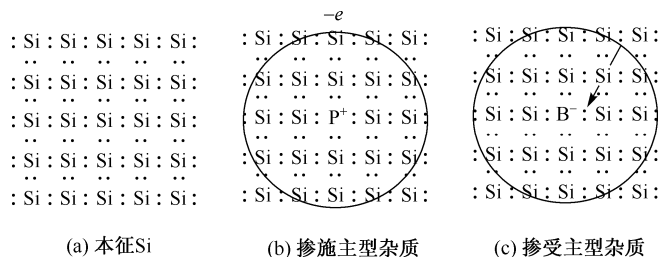


图 14.17 本征 Si 与掺杂 Si 示意图

如以三价原子硼(B)代替硅原子，则由于其外层只有三个价电子，与近邻形成完整的共价键还缺一个电子。此时，近邻硅原子上的价电子不需多大能量便能过来填补这一空缺而在自身位置留下一电子缺位，如图14.17(c)所示。由于硅原子的价电子处于价带中，

硅原子共价键上的电子缺失对应于价带中出现一个带 $+e$ 电荷的空穴。这个空穴在带 $-e$ 电荷的硼离子作用下, 将环绕硼离子 (B^-) 运动。计算表明: 室温下的热能足以使空穴在 (B^-) 的电场中电离, 约为 0.045 eV 。当然也比硅的禁带宽度 ($E_g = 1.09 \text{ eV}$) 要小很多。这时, 同样在半导体的价带和导带之间, 产生一附加能级, 这个能级的存在可为价带提供空穴, 也可认为它接受来自价带的电子。故这个能级称为**受主能级**, 而像硼这类三价杂质则为受主杂质。因为受主能级很靠近价带, 所以价带中的电子很容易因激发而跃迁到受主上去, 并在价带中留下空穴, 而空穴在电场的作用下要发生移动, 参与导电。由于含有受主杂质半导体的载流子为空穴, 通常就将掺有受主杂质的半导体称为 **p 型半导体**。

施主能级和受主能级如图 14.18 所示, 图中施主杂质能级为 E_d , 受主杂质能级为 E_a 。则 $E_c - E_d$ 为施主电离能, $E_a - E_v$ 为受主电离能。施主电离能与受主电离能都可用类氢模型估算, 为

$$E_i = \frac{m^* e^4}{8\pi\epsilon_0^2 \epsilon_s^2 h^2} = \left(\frac{m^*}{m}\right) \frac{1}{\epsilon_s^2} \times 13.6 \text{ eV} \quad (14-21)$$

式中 ϵ_s 为硅晶体的相对介电常数, m^* 为导带中的有效质量 (以电子质量为单位)。注意在计算受主电离能时, 用价带顶的空穴有效质量 m_h 代替上式中导带中的有效质量 m^* 。

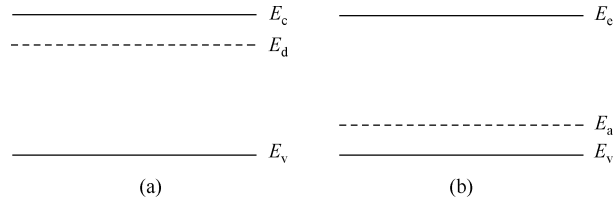


图 14.18 施主能级(a)和受主能级(b)示意图

14.5.3 PN 结、半导体器件

使 p 型半导体和 n 型半导体相接触, 在它们交界处的结构称为 **pn 结**。由于电子和空穴的密度在两类半导体中并不相同, p 区空穴多电子少, n 区电子多空穴少, 因此, 在两区交界处的多数载流子将向另一区扩散, 如图 14.19(a)所示, 使在交界处形成正负电荷的积累, 由于这个积累电荷在交接处形成一电偶层, 如图 14.19(b)所示。由于电偶层的存在, 在 p 型和 n 型相接触的区域, 也就产生由 n 指向 p 的电场, 从而阻止空穴、电子的进一步扩散, 直至达到动态平衡为止。这时, 在 p 型和 n 型相接触区域就存在如图 14.19(c)所示的电势变化情况。图中表示 U_0 为动态平衡时, p、n 势垒的高度。因而无论是空穴或电子都须要克服势垒 U_0 的高度才能通过偶电层进入 n 区或 p 区中去。实验证明: 如果对 pn 结两端不加电压, 半导体中没有电流; 当 pn 结正向连接, 即把正极接 p 端, 负极接 n 端,

就有电流通过, 且电流为正值 $I > 0$, 该电流叫做**正向电流**; 若反向连接时, 即把正极接 n 端, 负极接 p 端, 这时有反向电流 $I < 0$, 但绝对值较正向电流小, 如图 14.20 所示。

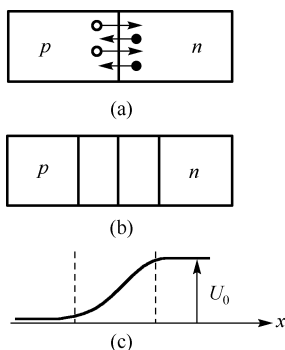


图 14.19 pn 结示意图

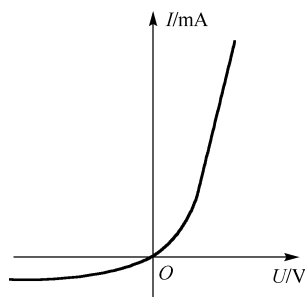


图 14.20 pn 的伏安特性

导体的情况就完全不同, 它和半导体之间, 不仅在电阻率的数量上有所不同, 而且还存在质的区别。有些导体, 如 Na、K、Cu、Al 等金属, 并没有满带存在, 一些被电子占有的能级和空着的能级紧紧地挨在一起; 另一些导体, 如 Mg、Be、Ze 等二价金属, 虽然也有满带, 但这些满带的导带交叠在一起形成一个统一的宽能带, 在这些情形中, 如有外场作用, 它们的电子很容易从一个能级跃入另一个能级, 而显出很强的导电能力, 因而电阻率也就很小。图 14.21 所示为半导体、绝缘体、金属的能带结构。

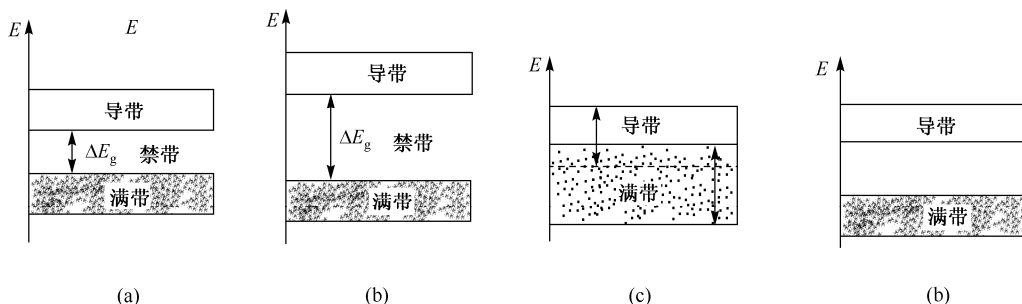


图 14.21 (a)半导体; (b)绝缘体; (c)金属(能带交叠); (d)金属(能带不交叠)

14.5.4 纳米材料

纳米是长度单位 ($1 \text{ nm} = 1 \times 10^{-9} \text{ m}$)。纳米微粒, 也叫**超细颗粒**, 通常所说的纳米材料是指线度在 $1 \sim 100 \text{ nm}$ 范围的小颗粒或由这些微粒加工成的块状或薄膜的固体材料, 这种尺度用肉眼和普通显微镜是看不到的。所以, 也有科学家说, 用电子显微镜 (TEM) 能看到的微粒称为纳米微粒。

1962 年久保 (R.Kubo) 指出金属超细颗粒有一些特点: 一是颗粒线度甚小, 其电子能级不再是准连续谱, 而是离散的, 能级间距随微粒的减小而增大; 二是电子总数少, 在有限个能级中分布; 三是颗粒直径 d 很小, 在颗粒上增减一个电子须要静电能量有相应的变化, 这个变化为

$$U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \quad (14-22)$$

d 很小时, U 可远大于 $k_B T$ (k_B 为玻尔兹曼常数, T 为热力学温度), 于是孤立颗粒电子数不会有涨落, 亦即通常微粒是保持电中性的。

纳米材料具有很多奇异特性。首先, 纳米超微颗粒有很高的“比表面积”, 这使其表面具有很高的活性。例如, 在空气中, 纳米金属颗粒会迅速氧化而燃烧。利用表面活性, 金属超微颗粒可望成为新一代的高效催化剂、贮气材料和低熔点材料。其次, 所有的金属在超微颗粒状态时都呈现为黑色, 尺寸越小, 颜色越黑。金属超微颗粒对光的反射率很低, 通常可低于 1%, 大约几微米厚度的膜就能起到完全消光的作用。利用这个特性可以制造高效率的光热、光电转换材料, 以很高的效率将太阳能转变为热能或电能。另外还有可能应用于红外敏感元件、红外隐身材料等。

大尺寸的固态物质其熔点往往是固定的, 超细微化的固态物质其熔点却显著降低, 当颗粒小于 10 nm 量级时尤为突出。例如, 金的常规熔点为 1064℃, 当其颗粒的尺寸减小到 10 nm 时, 熔点会降低 27℃, 而减小到 2 nm 的尺寸时的熔点仅为 327℃左右。

超微颗粒的小尺寸效应还表现在超导电性、介电性能、声学特性及化学性能等方面。

当热能、电场能或者磁场能比平均的能级间距还小时, 就会呈现出一系列与宏观物体截然不同的反常特性, 称之为量子尺寸效应。例如, 导电的金属在超微颗粒时可以变成绝缘体, 磁矩的大小与颗粒中电子是奇数还是偶数有关; 比热亦会反常变化; 光谱线会产生向短波长方向的移动, 这就是量子尺寸效应的宏观表现。在低温条件下, 对超微颗粒必须考虑量子效应, 原有的宏观规律已不再成立。

近年来, 人们发现一些宏观物理量, 如微颗粒的磁化强度、量子相干器件中的磁通量等显示出隧道效应, 称之为宏观的量子隧道效应。量子尺寸效应、宏观量子隧道效应将是未来微电子、光电子器件的基础, 或者说它确立了微电子器件进一步微型化的极限, 当微电子器件进一步微型化时必须要考虑上述的量子效应。

碳纳米管、石墨烯等新材料的物性及应用也被人们进一步地研究。纳米材料在微电子器件和通信、纳米医疗、化学和材料、能源、飞机航天等领域已被广泛地应用。总之, 纳米材料被誉为 21 世纪最有前途的材料, 具有广泛的应用前景。

本章提要

1. 固体的分类

(1) 晶体: 晶体结构的显著特点就是粒子(原子)排列规则, 具有排列的周期性, 这种周期的阵列称为点阵或格子。其宏观性质为: 规则的外形、一定熔点、各向异性、晶面角守恒、解理性, 即具有周期性(长程有序)。

(2) 非晶体: 构成物体的粒子不具有排列的周期性, 即没有长程周期性。

(3) 晶体的配位数: 晶体中一个原子的周围近邻的原子数叫配位数。可用来表征原子排列的紧密程度, 最紧密的堆积称为密堆积, 密堆积对应最大的配位数。

2. 晶体的周期结构(基元、格点、晶格)

$$\text{晶体结构} = \text{点阵} + \text{基元}$$

3. 晶体的分类

(1) 共价晶体: 以共价键相结合的晶体。

(2) 离子晶体: 依靠离子间的静电作用结合成晶体。

(3) 金属晶体: 靠共有化价电子与离子之间的相互作用形成的晶体。

(4) 分子晶体: 结构单元是分子, 分子之间依靠范德瓦尔斯力而形成的晶体。

(5) 氢键晶体: 依靠氢键相互结合而构成的晶体。

4. 原胞体积、晶胞

(1) 原胞体积: $\Omega = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)$, 式中 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 为原胞基矢。

(2) 晶胞: 晶胞是计及周期性和对称性的尽可能小的重复单元。

5. 典型的晶体结构

晶体可分为七大晶系, 14 种类型的布拉维格子。

6. 固体的能带结构

(1) 能带的概念。

(2) 满带、导带、价带、导带、带隙。

(3) 能态密度。

7. 导体、半导体和绝缘体

半导体分为两类, 一类叫本征半导体, 另一类叫杂质半导体。

本征半导体: 纯净的无杂质的半导体称为本征半导体。

杂质半导体又分为空穴型(p型)半导体和电子型(n型)半导体。

8. 纳米材料

(1) 纳米概念: 纳米(nanometer)是长度单位($1 \text{ nm} = 1 \times 10^{-9} \text{ m}$)。纳米微粒, 也叫

超细颗粒，是线度在 $1\sim 100\text{nm}$ 范围的小颗粒，肉眼和普通显微镜是看不到的，所以有科学家说：用电子显微镜（TEM）能看到的微粒称为纳米微粒。

(2) 纳米材料的奇异特性。

(3) 纳米材料的应用与展望。

阅读材料

激光简介

自 20 世纪 60 年代第一台激光问世以来，激光已广泛的应用于科学技术和日常生活，并引起了现代光学技术的巨大变革，促进了物理学和其他相关科学的发展。激光是基于受激发放大原理而产生的一种相干光辐射，在受激辐射的过程中，原子所发射的光波与入射光波同相位、同方向、同频率，所以受激辐射的光波波列很长，单色性和方向性很强，因而激光在计算机的光驱、激光唱机、打孔、焊接、切割及其他医学、生物、军事等各领域有着广泛的应用。下面简要的对激光原理等内容做一定的介绍。

1. 受激吸收、自发辐射和受激辐射

由现代物质结构理论知道，物质是由原子、分子或离子等构成，而这些原子原来处在低能级上。设 E_1 、 E_2 是某原子的任意两个能级， N_1 、 N_2 为两个能级上的原子数。当粒子受到频率为 ν 的光照射时，若满足 $h\nu = E_2 - E_1$ （ h 为普朗克常数），则原子可能吸收光子向高能态 E_2 （假设 $E_2 > E_1$ ）跃迁，这种过程称为**受激吸收**，或称为原子的**光激发**，14.22(a)。通常原子发射光和吸收光的过程总是和原子能级的跃迁相联系，当原子自发地从高能级 E_2 跃迁到低能级 E_1 时，可能发射一个频率为

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}$$

的光波列（也是吸收一个能量为 $h\nu$ 的光子）。这个过程叫**自发辐射**，如图 14.22(b)所示。自发辐射过程是一个随机过程，各个粒子的辐射是自发地，独立地进行的，它们所发出的光波列虽然频率都为 ν ，但各波列的相位、偏振态、传播方向之间没有联系，所以自发辐射的光波是非相干的，普通光源的发光过程都是自发辐射。

当处在高能态的原子在自发辐射前，受到频率为 ν 的外来光波列的刺激诱发作用，将从高能态 E_2 跃迁到低能级 E_1 时，同时辐射一个与外来光波列完全相同的光波列，这个过程叫**受激辐射**，如图 14.22(c)所示。在受激辐射过程中，发出的光波与入射光波具有完全相同的性质，它们的频率、相位、偏振方向及传播方向都相同。因此，这样的受激辐射的光是相干光。同时还要说明，一个入射光子作用的结果会得到两个状态全同的光子。这两

个光子又去刺激其他原子而变成四个光子,如此进行下去,产生连锁反应。从而实现了光放大,也就是说受激辐射使入射光强得到放大,因而受激辐射光放大是激光产生的基础。可见,在连续诱发的受激辐射中,各原子发出的光是互相联系的。

处于低能态 E_1 的原子,当受到频率为 ν 的外来光波列的刺激诱发作用,也可以吸收波列,并从低能态 E_1 跃迁到高能级 E_2 ,这种过程称为**受激吸收**,受激吸收使入射光强衰减。

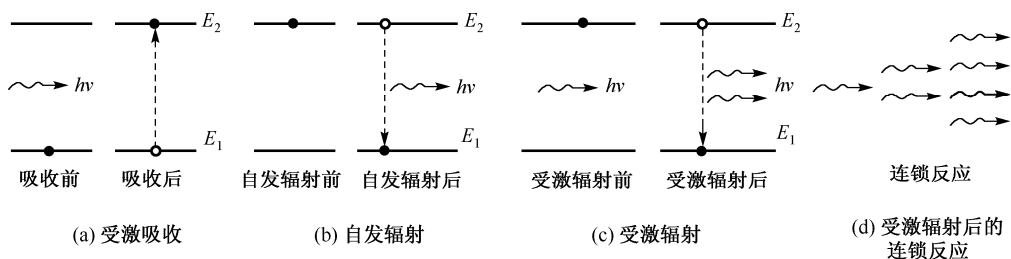


图 14.22 (a)受激吸收; (b)自发辐射; (c)受激辐射; (d)受激辐射后的连锁反应

2. 产生激光的条件

光和原子相互作用时,受激吸收、自发辐射和受激辐射三个过程是同时存在的,要产生激光单从受激吸收和受激辐射来看是相互矛盾的。吸收过程使光子数减少,而辐射过程则使光子数增加。因此,光通过物质时光子数是增加还是减少,这就取决于哪个过程占优势了,从本质上说,这决定于处于高、低能态的原子数。理论证明:在入射光能量密度一定的条件下,一个处在高能态 E_2 的原子发生受激辐射的概率和一个处在低能态 E_1 的原子数发生吸收的概率相等。统计物理理论进一步指出,工作物质中的原子在各能级上的分布服从玻耳兹曼分布定律,即在温度为 T 时,原子处于能级 E_i 的数目 N_i 为

$$N_i \propto e^{-E_i/kT} \quad (14-23)$$

式中 k 为玻耳兹曼常量。因此处于 E_1 、 E_2 的原子数之比为

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-(E_2-E_1)/kT} \quad (14-24)$$

即热平衡状态下,由于在高低能态上的原子数存在 $N_2 < N_1$ 关系,可进一步的计算,在常温 $T=300\text{ K}$ 、 $E_2-E_1=1\text{ eV}$ 时,有 $N_2/N_1=10^{-40}$,这说明常温时,处于高能态的原子数远小于低能级的原子数。这种分布为正常分布。在正常分布下,受激吸收胜于受激辐射,在这种情况下是不能实现光放大,也即不能产生激光。若介质在外界的诱导激励下,破坏了热平衡,则可能使 $N_2 > N_1$,这种分布状态与正常分布相反,称为**粒子数反转态**。只有具有合适能级结构的介质才能实现粒子数反转态,这种介质常称为**激活介质**。实现粒子数反转态是产生激光的必要条件。

3. 激活介质的工作模式

要实现粒子数反转态，就要有实现粒子数反转分布的激活介质（也叫工作介质），这种物质必须具有适当的能级结构。除此外还必须从外界输入能量，使激活介质有尽可能多的原子吸收能量后跃迁到高能态。这一能量供应过程称为“激励”，又称为“抽运”或“光泵”（泵浦源）。激励的方法一般有电激励（电流注入、弧光、或辉光放电）、光激励（闪光灯、激光）、气体激励、化学激励、核激励等。

一般来说，处于激发态的原子是不稳定的，平均寿命约为 10^{-8}s ，但有些物质存在比一般激发态稳定得多的能级，其平均寿命可达到 $10^{-3}\sim 1\text{s}$ 的数量级，这种受激态常称为亚稳态。具有亚稳态的物质有可能实现粒子数反转，从而实现光放大。

产生激光的工作物质有三能级系统和四能级系统，如图 14.23 所示。在三能级系统中， E_1 为基态能级， E_2 为亚稳态能级， E_3 为激发态能级。激励能源把 E_1 上的原子抽运到上去 E_3 ，但 E_3 上寿命很短，其上的原子很快的以无辐射跃迁方式转移到亚稳态 E_2 上，而在 E_2 态上的原子寿命较长，这样使 E_2 态的原子数不断增加， E_1 上的原子数不断减少，于是在 E_2 和 E_1 上的原子实现了原子数的反转。如果这时有一频率满足 $h\nu = E_2 - E_1$ 的外来光子射入，就会使受激辐射占优势而产生光放大。四能级系统中， E_1 、 E_2 和 E_3 都是激发态， E_2 是亚稳态。将原子从基态 E_0 抽运到激发态 E_3 后，无辐射跃迁到亚稳态 E_2 上，这样， E_2 上积累了大量的受激原子，由于 E_1 不是基态，其上本来原子数就少，于是在 E_2 与 E_1 之间就实现了粒子数反转。四能级系统工作模式对粒子数反转的效率比较高，在技术上应用较多，譬如：He-Ne 激光器， Co_2 激光器都采用这种模式。从三系统和四系统看，要实现粒子数反转，激活介质内必须要有亚稳态。

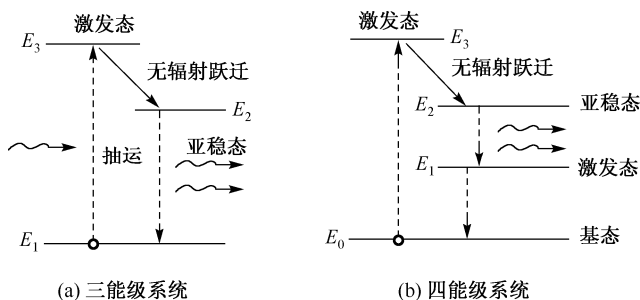


图 14.23 激活介质的工作模式

光在实现粒子数反转态的激活介质中传播时，介质对光有放大作用。设在介质中 x 处的光强为 I ，在 $x + dx$ 处的光强为 $I + dI$ ，研究表明，光强的增量 dI 与光强 I 和通过一段激活介质的厚度成正比，即

$$dI = GI(x)dx \quad (14-25)$$

式中 G 为增益系数, 描述光工作介质对光的放大能力, 可视为常量。将式 (14-25) 积分, 得

$$I = I_0 e^{Gx} \quad (14-26)$$

可见, 光强随距离按指数规律而增强。 G 越大, 激活介质的光放大能力越强, 光强增加越快。

4. 光学谐振腔

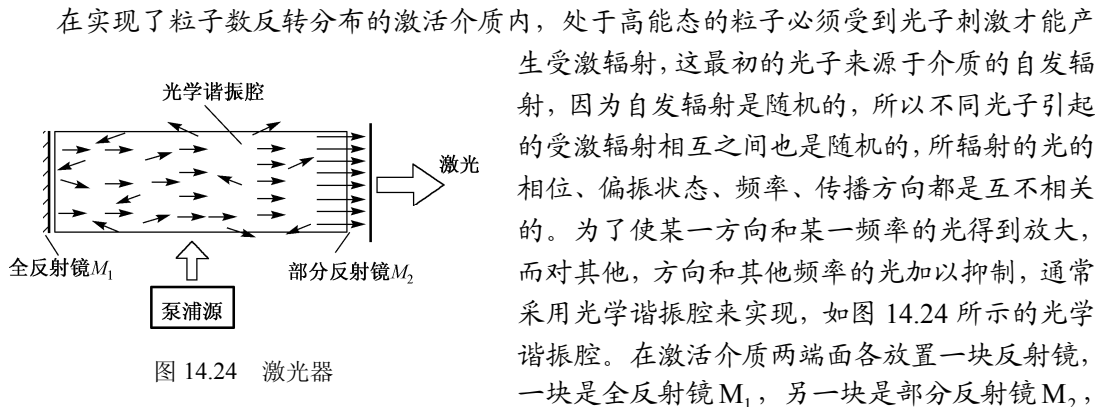


图 14.24 激光器

在实现了粒子数反转分布的激活介质内, 处于高能态的粒子必须受到光子刺激才能产生受激辐射, 这最初的光子来源于介质的自发辐射, 因为自发辐射是随机的, 所以不同光子引起的受激辐射相互之间也是随机的, 所辐射的光的相位、偏振状态、频率、传播方向都是互不相关的。为了使某一方向和某一频率的光得到放大, 而对其他, 方向和其他频率的光加以抑制, 通常采用光学谐振腔来实现, 如图 14.24 所示的光学谐振腔。在激活介质两端面各放置一块反射镜, 一块是全反射镜 M_1 , 另一块是部分反射镜 M_2 ,

这两块镜可以是平面, 也可以是凹面, 或者是一平面一凹面, 两反射镜的轴线与工作物质的轴线平行放置, 这样的一对反射镜系统称为**光学谐振腔**。光学谐振腔对光束传播方向具有选择性, 根据光的传播规律, 凡是偏离轴线的光或直接逸出腔外, 或经几次来回反射最终逸出腔外, 不能形成稳定光束, 只有沿腔轴方向的光束, 在腔内来回反射, 激活介质就在这些轴向运动的光子的刺激作用下, 产生轴向受激辐射, 从部分反射镜输出稳定的激光束。

谐振腔对激光的波长具有选择性, 激光器中所用的反射镜都镀有多层反射膜, 恰当地选择每层膜的厚度使所需波长的光束得到最大限度的反射, 而限制其他波长光的反射, 另外, 两反射镜间的距离, 使之等于所需光的半波长的整数倍, 这样该波长的光在腔内形成以镜面为波节的驻波, 产生稳定的振荡而不断得到加强。还有谐振腔的增益及损耗也是激光器的重要参数, 进一步的知识可查阅相关专著。

综上所述, 要形成激光, 必须满足几个条件, 一是要有能实现粒子数反转的激活介质, 这是前提条件; 二是要有满足阈值的谐振腔; 激励能源。

5. 激光的应用

自激光问世以来, 激光之所以能广泛的应用于科学技术和日常生活, 并引起了现代光学技术的巨大变革, 促进了物理学和其他相关科学的发展, 是和它的特殊性能分不开的。其主要特征有:

(1) 方向性好。若将激光射向几千米外, 光束直径仅扩展几厘米, 而普通按照灯扩展达几十米。这是因为激光束的发散角很小, 一般为 $10^{-5} \sim 10^{-8} \text{sr}$ 。激光的方向性好主要是由受激辐射的光放大机理和光学谐振腔的方向限制作用所决定。激光的这种方向性好可用于定位、导向、测距等。

(2) 单色性好。普通光源的单色光的谱线宽度约为 10^{-2}nm , 单色性最好的氪灯的谱线宽度为 $4.7 \times 10^{-3} \text{nm}$, 其他还有氦氖激光器发射的 632.8nm 的激光的谱线宽约为 10^{-9}nm 。利用激光的单色性好的特性, 可作为计量工作的标准光源。例如, 用单色、稳频激光器作为光频计时标准, 它在一年内的计时误差不超过 $1 \mu\text{s}$, 精度非常高。

(3) 相干性好。由于激光器发射的激光是通过受激辐射发光的, 它是相干光, 所以激光具有很好的相干性, 利激光光源进行有关的光学实验具有独特的优点。

(4) 高亮度和高强度。激光发射的能量被限制在很小的立体角中, 所以, 光源在单位发光表面在单位时间内沿给定方向上单位立体角发射的能量就大, 有些大功率激光可达 $10^{10} \sim 10^{17} \text{W} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}$ 的数量级。正是由于这种能量在实、空间和时间上高度集中, 因此在直径很小的区域内可产生几百万度的高温。利用激光高亮度的特性, 可用于打孔、切割、焊接、表面氧化、区域熔化等工业加工。现代医学上还用于制造激光手术刀作外科手术。

6. 激光冷却

由于原子永不停息的热运动中, 在常温下, 热运动的速率可达 $10^2 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。在这种情况下要想控制孤立原子, 首先要解决的问题是“冷却”原子, 降低它的速率。这是发展纳米技术的须要解决的关键问题。但在降温时一般原子的物态会改变, 其结构和性能发生较显著的变化。1975 年, T.Hansch 和 A.L.Schawlowr 提出用激光冷却原子, 认为原子对光子的共振吸收, 再发射或说原子对光子的散射而导致反冲, 会影响原子的运动。由此可使原子的温度达到极低。经过几十年的努力, 目前应用磁光原子阱-蒸发冷却可使原子的温度达到 20nK (由 M.H.Anderson 实现)。

激光冷却的基本原理是, 设原子沿某方向以速度 v_0 作一维运动, 激光束迎面照射原子, 发生共振吸收。原子吸收光子后, 以自发辐射方式发射光子回到基态。接着再吸收、再辐射, 每次吸收一个迎面而来的光子, 原子都会获得与其运动方向相反的运动, 即原子损失动量而减速, 如图 14.25 所示。假定一个原子处在弱的激光驻波场内, 使激光频率低于原子的共振频率, 驻波由两个反向传播的以构成。正反两方向的行波对运动原子产生多普勒效应, 原子感受到与其运动相反的行波频率时, 就吸收光子。原子在吸收光子后, 由运动守恒, 有

$$mv_0 - \frac{h\nu}{c} = mv$$

于是

$$\Delta v = (v_0 - v) = \frac{h\nu}{mc}$$

其中 m 是原子质量, 这样原子反冲导致速度降低 Δv 。这就是原子在与光子相互作用过程中, 由于发生动量交换而受到与一个与其运动相反的阻尼力, 使运动减慢, 原子温度随之降下来。这种方式称为多普勒冷却方式。

激光冷却还有其他方式, 这里就不介绍了。

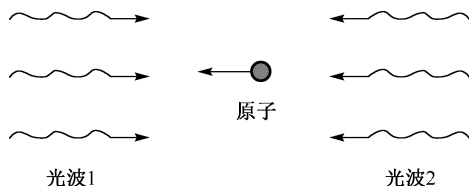


图 14.25 驻波场中原子吸收光子, 原子损失动量而减速

习题

14.1 解释如下概念: ①原胞; ②空间点阵。

14.2 氯化钠与金刚石结构是复式格子还是布拉维格子, 各自的基元为何? 写出这两种结构的原胞与晶胞基矢, 设晶格常数为 a 。

14.3 定义: 原子堆积模型中, 原子球体积与晶体体积之比为致密度。若晶体中最小重复单元为晶胞, 则致密度定义为

$$\eta = \frac{\text{晶胞中原子体积}}{\text{晶体体积}}$$

试由此式计算简立方晶体的致密度。简立方晶体模型如图 14.26 所示。

14.4 制造半导体元件的纯净锗必须掺入少量杂质原子, 设均匀掺杂的比例为 10^{-9} , 若将锗的结构看作立方点阵, 晶格常量设为 0.5 nm , 试估计杂质原子之间的距离。

14.5 何为本征半导体、n 型半导体、p 型半导体, 它们的载流子各是什么? 它们的能带结构有何区别?

14.6 已知金属钠的质量密度为 $9.71 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 且每个钠原子只有一个电子。求: ①载流子浓度; ②费米能; ③费米速度。

14.7 在光学波段产生受激辐射, 一个必要的条件是粒子数反转。实现粒子数反转的典型方法有哪些?

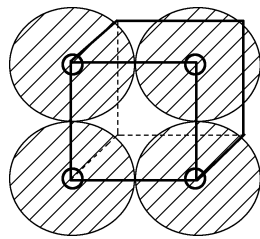


图 14.26 题 14.3 图

习题参考答案

第 9 章

9.1 C

9.2 B

9.3 B

9.4 A

9.5 A

9.6 D

9.7 $\frac{T}{n}$

9.8 $-A\omega\sin(\pi + \varphi_0)$, $-A\omega^2\cos(\pi + \varphi_0)$

9.9 10 cm , $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{24}{5}\text{ s}$, $x = 0.1\cos\left(\frac{5\pi}{12}t + \frac{2}{3}\pi\right)$

9.10 $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}(\sqrt{2}+1)$, $x_0\sqrt{\frac{k}{2m}}$

9.11 $\frac{3}{8}kA^2$

9.12 $x(t) = \frac{Mg}{k} - \frac{Mg}{k}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}t + \pi\right)$

9.13 D

9.14 B

9.15 C

9.16 C

9.17 A

9.18 C

9.19 $4T$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ s}$

9.20 $2\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, 0 , $x(t) = 2\cos 2t$, $12\sqrt{2}\text{ N}$, 负方向

9.21 略

9.22 $\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

9.23 由于位相差为 π , 合成后位相与 x_1 同相即为 π , $A = A_1 - A_2$

9.24 $x = \frac{120}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{6}\right)$

9.25 略

9.26

$$y_0 = A \cos(2\pi\nu t + \phi) = 2 \times 10^{-2} \cos\left(100\pi t - \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$\nu = -2 \times 10^{-2} \times 100\pi \sin\left(200\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = 6.28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

9.27 $A_2 = 0, 1 \text{ m}, \phi = \frac{\pi}{2}$

9.28 ① $\pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{3\pi}{2}$; ② 25%, 75%

第 10 章

10.1 B

10.2 D

10.3 C

10.4 C

10.5 D

10.6 A

10.7 A

10.8 D

10.9 D

10.10 $a = -0.2\pi^2 \cos\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi x\right) (\text{SI})$

10.11 $y = 2 \times 10^{-3} \cos\left(200\pi - \frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi\right) (\text{SI})$

10.12 $5.0 \times 10^4, 2.86 \times 10^{-2} \text{ m}, 1.43 \times 10^3 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

10.13 ① $2k\pi + 9\pi/2, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; ② $2k\pi + 3\pi/2, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

10.14 $y = A \cos\left[2\pi\nu\left(t + \frac{x+L}{\lambda\nu}\right) + \frac{\pi}{2}\right]; t_1 + \frac{L}{\nu\lambda} + \frac{k}{\nu}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$10.15 \quad y = A \cos \left[2\pi \left(\nu t - \frac{L_1 + L_2}{\lambda} \right) + \varphi \right]; \quad x = -L_1 + k\lambda \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$10.16 \quad y_P = 0.2 \cos \left(\frac{\pi}{2} t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$10.17 \quad \frac{\omega \lambda}{2\pi} S_W$$

$$10.18 \quad \Delta \varphi = \frac{2\pi \Delta r}{\lambda} = 2\pi \frac{AP - BP}{\lambda} = 12\pi$$

10.19

① 振幅: $A = 0.05 \text{ m}$; 波速: $u = \lambda \nu = 50 \text{ m/s}$; 频率: $\nu = 50 \text{ Hz}$; 波长: $\lambda = 1.0 \text{ m}$

② 最大振动速度和最大振动加速度

$$v_{\max} = (\partial y / \partial t)_{\max} = 2\pi \nu t = 15.7 \text{ m/s}$$

$$a_{\max} = (\partial^2 y / \partial t^2)_{\max} = 4\pi^2 \nu^2 A = 4.93 \times 10^3 \text{ m/s}^2$$

③ $\Delta \varphi = 2\pi(x_2 - x_1) / \lambda = \pi$, 二振动反相

10.20

$$① \quad y = A \cos \left(2\pi \nu t - \frac{1}{2} \pi \right)$$

$$② \quad v = dy / dt = -2\pi \nu A \sin \left(2\pi \nu t + \frac{1}{2} \pi \right) = 2\pi \nu A \cos(2\pi \nu t + \pi)$$

10.21

$$① \quad \text{故波动表达式为 } y = 0.04 \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{5} - \frac{x}{0.4} \right) - \frac{\pi}{2} \right] (\text{SI})$$

$$② \quad \text{P 处质点的振动方程为 } y = 0.04 \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{5} - \frac{x}{0.4} \right) - \frac{\pi}{2} \right] = 0.04 \cos \left(0.4\pi t - \frac{3\pi}{2} \right) (\text{SI})$$

10.22

$$① \quad \text{坐标原点处振动方程为 } y_0 = A \cos \left(\frac{\pi t}{8} - \frac{\pi}{2} \right) (\text{SI})$$

$$② \quad \text{波动表达式为 } y = A \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{16} + \frac{x}{160} \right) - \frac{\pi}{2} \right] (\text{SI})$$

10.23

$$\text{质点振动的表达式为 } y = A \cos \left(2\pi \nu t + \varphi - \frac{2\pi \nu t}{u} \right) (\text{SI})$$

$$= 2 \times 10^{-2} \cos \left(100\pi t - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2} \right)$$

$$\text{该质点在 } t = 2 \text{ s 时的振动速度为 } v = 2\pi \sin \left(200\pi - \frac{\pi}{2} \right) = 6.28 \text{ m/s}$$

第 11 章

11.1 ① A. $5 \times 10^{-3} \text{ m}$; ② D. 0.1 m ; ③ B. 1.53 11.2 ① C. 52.43° ; ② B. 35.81° 11.3 D. 96.2 nm

11.4 B. 3 个

$$11.5 \quad ① \quad D = 2h\theta = 1.22 \frac{2l\lambda}{d}$$

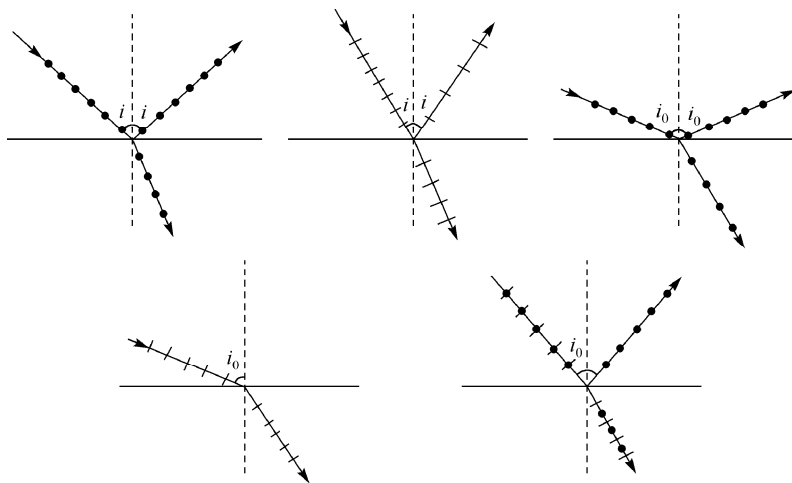
$$= 1.22 \times \frac{2 \times 3.84 \times 10^8 \times 632.8 \times 10^{-9}}{2 \times 10^{-3}} \text{ m} = 2.96 \times 10^5 \text{ m}$$

② 若激光束扩束为 d' , 则艾里斑直径为

$$D' = \frac{d}{d'} D = \frac{2 \times 10^{-3}}{2} \times 2.96 \times 10^5 = 296 \text{ m}$$

11.6 60° 11.7 $R_2 = 1.03 \text{ m}$

11.8



题 11.8 答案

$$11.9 \quad \theta = \frac{\lambda}{4h}$$

11.10 由光栅方程可知, $\sin \varphi = k\lambda / d$ 。当 $k=2$ 时, $2\lambda / d = 1.0005 > 1$, 显然, 第二级明纹不会出现

11.11 见右图

11.12 60° 11.13 (1) 52.43° ; (2) 35.81°

11.14 96.2 nm

11.15 $I_0/4$ 11.16 54.7° 11.17 $\alpha_1 = \arctan \frac{n_2}{n_1} = 48^\circ 26'$; $\alpha_2 = \arctan \frac{n_1}{n_2} = 41^\circ 34'$

11.18

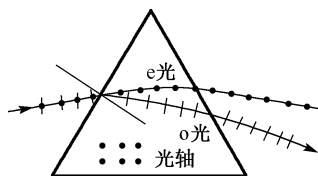
o 光的波长为 $\lambda_o = \frac{\lambda}{n_o} = \frac{589}{1.658} \approx 355 \text{ nm}$ e 光在介质中的波长 $\lambda_e = \frac{\lambda}{n_e} = \frac{589}{1.486} \approx 395 \text{ nm}$

如果光束与光轴间成任意角度入射, 则 e 光的波长会因入射光与光轴间夹角不同而改变, 其波长可能的范围为

$$355 \text{ nm} \leq \lambda_e \leq 395 \text{ nm}$$

11.19 当 $k=2$ 时, $\lambda_z = 6.88 \times 10^{-7} \text{ m} = 688 \text{ nm}$; 当 $k=3$ 时, $\lambda_1 = 4.91 \times 10^{-7} \text{ m} = 491 \text{ nm}$; 而当 k 取其它值时, 波长超出了可见光范围, 人眼看不见

11.20 略

11.21 (1) $5 \times 10^{-4} \text{ m}$; (2) 0.75 mm ; (3) $1.5 \times 10^{-3} \text{ m}$ 11.22 $a+b=1.03 \times 10^{-4} \text{ cm}$; $N=9.71 \times 10^3$; 不出现11.23 有波长 $\lambda_1=0.13 \text{ nm}$ 和 $\lambda_2=0.097 \text{ nm}$ 的光可以产生强反射11.24 $48^\circ 26'$; $41^\circ 34'$; 两角互余11.25 $s=8.9 \times 10^3 \text{ m}$ 

题 11.11 答案

第 12 章

12.1 大于

12.2 $\frac{c}{k} \sqrt{k^2 - 1}$ 12.3 $c\Delta t$ 12.4 $\frac{L}{v_2} \cdot \frac{\frac{L}{v_2} + \frac{v_1}{c^2} L}{\sqrt{1 - (v_1/c)^2}}$ 12.5 $6/\sqrt{5}$

12.6 0.075 m^3

12.7 $u = \sqrt{1 - \frac{a^2}{l_0^2}} c$

12.8 $m/lS \quad 25m/9lS$

12.9 D

12.10 0.4 kg

12.11 $0.6a^2$

12.12 10^9 m

12.13 37.5 s

12.14 $\frac{m_0}{ab[1 - (v/c)^2]}$

12.15 $\frac{2m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$

12.16 $(2/3)^{1/2} c$

12.17 $3c/4 \quad -0.4c$

12.18 $1.48 \times 10^{10} \text{ m}; \quad 50.5 \text{ s}$

12.19 $6.72 \times 10^8 \text{ m}$

12.20 $8 \text{ m/s}; \quad 1.49 \times 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

12.21 $\frac{c}{K} \sqrt{K^2 - 1}$

12.22 $1.25 \text{ kg}; \quad 9 \times 10^{16} \text{ J}; \quad 1.13 \times 10^{17} \text{ J}$

12.23 $0.284m_0; \quad 0.284m_0c^2$

12.24 9.1%

12.25 $\frac{2L_0v}{c^2 \sqrt{1 - (v/c)^2}}$

第 13 章

13.1 D

13.2 B

13.3 B

13.4 光电子的最大动能为

$$E_k = \frac{hc}{\lambda} - W = (4.13 - 2.30) \text{ eV} = 1.83 \text{ eV}$$

13.5 $0.659 \times 10^{-7} \text{ eV}; \quad 367.0 \text{ nm}; \quad 7.13 \times 10^{-6} \text{ nm}$

13.6

电子速率为

$$v = \frac{\sqrt{24}}{5}c = 2.9 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

电子动量为

$$p = mv = \sqrt{24}m_0c = 1.34 \times 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

电子能量为

$$E_k = E - E_0 = 4m_0c^2 = 3.28 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$13.7 \quad z_l = 2(2l+1) = 10; \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2; \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

13.8 由于光子与电子的波长相同, 它们的动量均为

$$p = \frac{h}{\lambda} = 3.32 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

光子的动能为

$$E_k = E = pc = 6.22 \text{ keV}$$

因电子的相对论动能 $E_k = pc$ (6.22 keV) $\ll E_0$ (0.512 MeV) 故可以忽略相对论效应, 电子的动能可用公式 $E_k = \frac{p^2}{2m}$ 计算, 即 $E_k = \frac{p^2}{2m} = 37.8 \text{ eV}$

$$13.9 \quad 0.659 \times 10^{-7} \text{ eV}; \quad 367 \text{ nm}; \quad 7.13 \times 10^{-6} \text{ nm}$$

$$13.10 \quad v = 5.74 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$13.11 \quad 0.00421 \text{ nm}$$

$$13.12 \quad \int_0^{a/3} |\psi_1(x)|^2 dx = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}; \quad \int_0^{a/3} |\psi_2(x)|^2 dx = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi}; \quad \int_0^{a/3} |\psi_3(x)|^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$13.13 \quad \Delta x \geq \frac{h}{4\pi\Delta p_x} = \frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda} = 3.18 \times 10^4 \text{ nm}$$

$$13.14 \quad 1.096 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

13.15 略

$$13.16 \quad \Delta E \geq \frac{h}{4\pi\Delta t} = 5.28 \times 10^{-32} \text{ J}; \quad \Delta\nu = \frac{\Delta E}{h} \geq \frac{1}{4\pi\Delta t} = 79.6 \times 10^{-32} \text{ Hz}$$

$$13.17 \quad E_{\text{电离}} = E_{\infty} - E_1 = 13.6 \text{ eV}; \quad \Delta E = E_2 - E_1 = 10.2 \text{ eV}$$

$$13.18 \quad \text{加宽后能量本征值和能量本征态分别是 } \varepsilon_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}, \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \frac{n\pi x}{2a}, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

所以, $\psi(x, 0)$ 不是能量本征态

第 14 章

14.1 ① 原胞: 组成晶体的最小重复单元, 设 a_1 、 a_2 、 a_3 为基矢, 由它们转成的平行六面体叫原胞

② 空间点阵: 晶体中微粒的重心作周期性排列组成的骨架, 称为晶格, 微粒重心位置称为格点。这些格点的总体称为空间点阵(简称点阵), 简言之, 空间点阵就是晶体中微粒重心位置的几何点的总体

14.2 略

$$14.3 \quad \eta = \frac{\text{晶胞中原子体积}}{\text{晶体体积}} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3}{a^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0.52$$

14.4 设杂质原子在纯净锗内均匀分布, 锗原子密度为 n_1 , 杂质原子数密度为 n_2 , 依据题意, 有 $\frac{n_2}{n_1} = 10^{-9}$ 。将锗的结构假设为立方点阵, 设锗的晶格常量为 a_1 , 杂质间的距离

为 a_2 , 对单位体积, 应有 $a_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{n_1}}$, $a_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{n_2}}$, 所以 $a_2 = a_1 \sqrt[3]{\frac{n_1}{n_2}} = 0.5 \mu\text{m}$

14.5 略

$$14.6 \quad ① \quad n = \frac{\rho}{m_{\text{Na}}} = \frac{9.71 \times 10^2}{m_{\text{mol}} / N_A} = 2.45 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$$② \quad E_F = \frac{3^{2/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{2m_e} n^{2/3} = 5.05 \times 10^{-19} \text{ J} = 3.15 \text{ eV}$$

$$③ \quad v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m_e}} = 1.05 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

参 考 文 献

- [1] 程守洙, 江之永. 普通物理学 (上、下) (第 6 版). 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [2] 马文蔚. 物理学 (上、下) (第 5 版). 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [3] 孙云卿. 大学物理. 北京: 电子工业出版社, 2005.
- [4] 朱峰. 大学物理 (第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [5] 赵凯华, 陈熙谋. 电磁学 (上、下) (第 3 版). 北京: 高等教育出版社, 2011.
- [6] 母国光, 战元龄. 光学 (第 2 版). 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [7] 周世勋. 量子力学教程. 北京: 高等教育出版社, 1979.
- [8] 曾谨言. 量子力学 (第 4 版). 北京: 科学出版社, 2007.
- [9] 黄昆, 韩汝琦. 固体物理学 (第 2 版). 北京: 高等教育出版社, 1988.
- [10] 汪志诚. 热力学统计物理 (第 3 版). 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [11] 郑勇林, 葛泽玲. 近代物理实验. 成都: 西南交通大学出版社, 2011.
- [12] 王广厚. 团簇物理学. 上海: 上科学技术出版社, 2003.
- [13] 李政道. 粒子物理学和场论. 上海: 上海科学技术出版社, 2006.
- [14] 李福利. 高等激光物理学. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [15] 刘宗华. 混沌动力学基础及其应用. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [16] 李正中. 固体理论. 北京: 高等教育出版社, 2006.

附表 1 常用物理常数 (2002 年国际推荐值)

物 理 量	符 号	数 值	单 位
真空中光速	c	299 792 458 (精确)	m/s
真空磁导率	μ_0	$4\pi\times10^{-7}$ (12.566 370 614 $\times10^{-7}$)	N/A ²
真空介电常数	ε_0	$8.854\,187\,817\cdots\times10^{-12}$	F/m
万有引力常数	G	$6.672\,42(10)\times10^{-11}$	m ³ /(kg·s)
普朗克常数	h	$6.626\,069\,3(11)\times10^{-34}$	J·s
普朗克常数 (以电子伏为单位)		$4.135\,667\,27(16)\times10^{-15}$	eV·s
$h/2\pi$	\hbar	$1.054\,571\,686(18)\times10^{-34}$	J·s
$h/2\pi$ (以电子伏为单位)		$6.582\,118\,89(26)\times10^{-16}$	eV·s
基本电荷	e	$1.602\,176\,53(14)\times10^{-19}$	C
精细结构常数: $e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c$	α	$7.297\,352\,568(24)\times10^{-3}$	
里德伯常数: $\alpha^2 m_e c/2h$	R_∞	$1.097\,373\,156\,852\,5(73)\times10^7$	m ⁻¹
玻尔半径: $\alpha/4\pi R_\infty$	a_0	$0.529\,177\,210\,8(18)\times10^{-10}$	m
电子质量	m_e	$9.109\,382\,6(16)\times10^{-31}$	kg
以 MeV 为单位		0.510 998 918(44)	MeV
电子荷质比	e/m_e	$1.758\,820\,12(15)\times10^{11}$	C/kg
电子康普顿波长: $h/m_e c$	λ_e	$2.426\,310\,238(16)\times10^{-12}$	m
质子质量	m_p	$1.672\,621\,71(29)\times10^{-27}$	kg
中子质量	m_n	$1.674\,927\,28(29)\times10^{-27}$	kg
氘核质量	m_d	$3.343\,583\,35(57)\times10^{-27}$	kg
电子磁矩	μ_e	$-9.284\,764\,12(80)\times10^{-24}$	J/T
质子磁矩	μ_p	$1.410\,570\,47(12)\times10^{-26}$	J/T
中子磁矩	μ_n	$-0.966\,236\,45(24)\times10^{-26}$	J/T
玻尔磁子: $e\hbar/2m_e$	μ_B	$9.274\,009\,49(80)\times10^{-24}$	J/T
核磁子: $e\hbar/2m_p$	μ_N	$5.050\,783\,43(43)\times10^{-27}$	J/T
摩尔气体常数	R	8.314 472(15)	J/(mol·K)
玻尔兹曼常数	k	$1.380\,650\,5(24)\times10^{-23}$	J/K
阿伏伽德罗常量	N_A	$6.0221415(10)\times10^{23}$	/mol
摩尔体积 (理想气体, $T=273.15\text{ K}$, $p=101.325\text{ kPa}$)	V_m	22.413 996(39)	L/mol

附表 2 国际单位制 (SI) 基本单位

基本量	单位名称	单位符号
长度	米	m
质量	千克 (公斤)	kg
时间	秒	s
电流	安[培]	A
热力学温度	开[尔文]	K
物质的量	摩[尔]	mol
发光强度	坎[德拉]	cd

附表 3 国际单位制中具有专门名称的导出单位

量的名称	导出单位和辅助单位		
	单位名称	符号	基本单位和导出单位表示
[平面]角	弧度	rad	1 rad=1 m/m=1
立体角	球面度	sr	1 sr=1 m ² /m ² =1
频率	赫[兹]	Hz	1 Hz=1 s ⁻¹
力	牛[顿]	N	1 N=1 kg·m/s ²
压力, 压强, 应力	帕[斯卡]	Pa	1 Pa=1 N/m ²
能[量], 功, 热量	焦[耳]	J	1 J=1 N·m
功率, 辐[射能]通量	瓦[特]	W	1 W=1 J/s
电荷[量]	库[仑]	C	1 C=1 A·s
电压, 电动势, 电位, (电势)	伏[特]	V	1 V=1 W/A
电容	法[拉]	F	1 F=1 C/A
电阻	欧[姆]	Ω	1 S=1 A/V
电导	西[门子]	S	1 Wb=1 V·s
磁通[量]	韦[伯]	Wb	1 T=1 Wb/m ²
磁能[量]密度, 磁感应强度	特[斯拉]	T	1 H=1 Wb/m ²
电感	亨[利]	H	1 H=1 Wb/A
摄氏温度	摄氏度	°C	1 °C=1 K
光通量	流[明]	lm	1 lm=1 cd·sr
[光]照度	勒[克斯]	lx	1 lx=1 lm/m ²
[放射性]活度	贝可[勒尔]	Bq	1 Bq=1 s ⁻¹
吸收剂量	戈[瑞]	Gy	1 Gy=1 J/kg
剂量当量	希[沃特]	Sv	1 Sv=1 J/kg

附表 4 SI 词头

名称	符号	表示的因素	名称	符号	表示的因素
尧[它]	Y	10 ²⁴	分	d	10 ⁻¹
泽[它]	Z	10 ²¹	厘	c	10 ⁻²
艾[可萨]	E	10 ¹⁸	毫	m	10 ⁻³
拍[它]	P	10 ¹⁵	微	μ	10 ⁻⁶
太[拉]	T	10 ¹²	纳[诺]	n	10 ⁻⁹
吉[咖]	G	10 ⁹	皮[可]	p	10 ⁻¹²
兆	M	10 ⁶	飞[母托]	f	10 ⁻¹⁵
千	k	10 ³	阿[托]	a	10 ⁻¹⁸
百	h	10 ²	仄[普托]	z	10 ⁻²¹
十	Da	10 ¹	幺	Y	10 ⁻²⁴

